

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS EN EL SISTEMA PENSIONAL
COLOMBIANO BAJO EL ESQUEMA MULTIFONDOS (2013-2018)



Oscar Daniel Betancurt Zanabria

Andrés Felipe Bonilla Saldaña

Steven Niño Rodríguez

Proyecto de grado para optar por el título de Economista

Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

Facultad de Administración y Economía

Programa de Economía

Bogotá 2019-1

Contenido

Introducción	2
Pregunta Problema	4
1. Optimización de portafolios en el sistema pensional colombiano esquema multifondos (2013-2018)	4
1.1. Objetivo General	4
1.2. Objetivos específicos	4
2. Justificación	5
3. Marco Teórico	7
3.1. Elección de portafolios	7
3.2. Esquema multifondos	17
4. Metodología	19
5. Revisión De Autores	21
6. Desarrollo Conceptual	25
6.1. Selección de activos y hechos estilizados	25
6.2. Metodología ARCH y GARCH	28
6.3. Validación de Supuestos	36
6.3.1. Prueba Dickey-Fuller	36
6.3.2. Prueba de Ruido Blanco	36
7. ANÁLISIS DE RESULTADOS	38
7.1.1. Fondo Conservador	38

7.1.2. Fondo Moderado.....	41
7.1.3. Fondo agresivo.....	43
7.2. Comparación de Carteras con las AFP.....	46
8. Conclusiones.....	48
9. Recomendaciones	50
Fuentes Bibliográficas	51
Anexos	56

Índice de Gráficos

Gráfico 1 Frontera Eficiente Markowitz Generalizada.....	10
Gráfico 2 volatilidad de cada activo	29
Gráfico 3 prueba de ruido blanco generalizada	37
Gráfico 4 Frontera eficiente fondo conservador	39
Gráfico 5 distribución de portafolio por tipo de activo (fondo conservador)	40
Gráfico 6 frontera eficiente fondo moderado	42
Gráfico 7 distribución de portafolio por tipo de activo (Fondo moderado).....	43
Gráfico 8 frontera eficiente fondo agresivo	44
Gráfico 9 distribución de portafolio por tipo de activo (fondo agresivo)	45
Gráfico 10 fondo conservador	46
Gráfico 11 fondo moderado.....	46
Gráfico 12 fondo agresivo	47

Índice de Tablas

Tabla 1 clasificación de activos	18
Tabla 2 activos seleccionados con su respectiva abreviación.....	26
Tabla 3 Hechos estilizados	27
Tabla 4 Resultados pruebas Dickey- Fuller y Ruido blanco	37
Tabla 5 Matriz varianza - covarianza	37
Tabla 6 resultados de los portafolios para el fondo conservador	38
Tabla 7 Rendimientos de cartera del modelo Sharpe para el fondo conservador	40
Tabla 8 resultados de los portafolios para el fondo moderado	41
Tabla 9 rendimientos de cartera del modelo Sharpe para el fondo moderado.....	42
Tabla 10 resultados de los portafolios para el fondo agresivo.....	43
Tabla 11 rendimientos de cartera del modelo Sharpe para el fondo agresivo	44

ANEXOS

Anexo 1. Do File.....	56
Anexo 2. Graficas de ruido blanco	64
Anexo 3. Rentabilidad del portafolio para el fondo conservador	67
Anexo 4. Rentabilidad del portafolio para el fondo moderado.....	69
Anexo 5. Rentabilidad del portafolio para el fondo riesgoso	70

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Resumen

En el presente documento se busca plantear un modelo de portafolios óptimos para fondos pensionales en Colombia analizando en primera medida el modelo del esquema multifondos implementando desde el 2008, utilizando el modelo de optimización de carteras de inversión de Markowitz haciendo uso de una estimación de volatilidad con la familia de modelos (GARCH por sus siglas en inglés generalized autoregressive conditional Heteroskedasticity Model) ,lo que permite un acercamiento más profundo de la realidad del sistema financiero, teniendo en cuenta las limitaciones establecidas por el sistema legal Colombiano.

Palabras Clave:

Sistema pensional, ley 100, esquema multifondos, optimización de portafolio, GARCH

Abstract

The present document seeks to propose an optimal portfolios model for pension funds in Colombia by first analyzing the model of the multi-fund scheme implemented since 2008, using Markowitz's investment portfolio optimization model using an estimation of volatility with the family of generalized model with conditional heteroscedasticity (GARCH) models, which allows a deeper approach to the reality of the financial system, taking into account the limitations established by the Colombian legal system.

Key words: Pension system, law 100, multifund scheme, portfolio optimization, GARCH

Clasificación JEL: G11, G14, G18, G23, G28.

Introducción

A partir de la existencia del artículo 48 de la constitución política de 1991 en el que se crea el sistema de seguridad social el cual permite un control y coordinación de las actividades al estado garantizando a la población el derecho de permanecer en el esquema de seguridad social. La participación de entidades privadas junto con el estado permite cubrir la prestación de servicios en un entorno de ley con el fin de evitar la destinación de los recursos de la seguridad social diferentes al propósito fundamental. La ley reservara los recursos pensionales de manera constante para conservar el poder adquisitivo. Este articulo está ligado a la expedición de la ley 100 de 1993 que tiene por objeto

El Sistema General de Pensiones tiene por objeto garantizar a la población, el amparo contra las contingencias derivadas de la vejez, la invalidez y la muerte, mediante el reconocimiento de las pensiones y prestaciones que se determinan en la presente ley, así como propender por la ampliación progresiva de cobertura a los segmentos de población no cubiertos con un sistema de pensiones. (Ley 100 de 1993, artículo 10, 2019).

La estructura del sistema pensional colombiano está conformada por dos regímenes:

- El régimen solidario de prima media con prestación definida (Fondo público – COLPENSIONES).
- Régimen de ahorro individual con solidaridad (Fondos privados de inversión)

La aplicación del sistema pensional modificada en la ley 797 del 2003 afirma que esta tendrá una aplicación a todo habitante perteneciente a territorio nacional, conservando todos sus derechos, garantías y respectivas concesiones, servicios y beneficios, siempre y cuando cumplan con los requisitos previamente establecidos y constatados en la ley que le

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

permitan acceder a una pensión ya sea por jubilación, vejez, invalidez, sustitución o sobrevivientes de los sectores públicos, oficial, semioficial en todos sus órdenes y del sector privado.

❖ **Régimen de ahorro individual con solidaridad (fondo privado)**

En la actualidad existen cuatro entidades privadas autorizadas en la administración de fondos de pensión y cesantías las cuales son:

- Colfondos pensiones y cesantías
- Pensiones y cesantías protección
- Porvenir S.A
- Old mutual

La inclusión del sistema de pensión privado facilitó la eliminación de regímenes especiales, además de incluir una red de seguridad en forma de pensiones mínimas y beneficios de vejez garantizados por el estado e incluir el concepto de cuentas individuales.

El esquema multifondos está dirigido al sistema privado de pensiones que ofrece tres tipos de portafolio (Conservador, moderado y de mayor riesgo) para que el ahorro del trabajador sea invertido, teniendo en cuenta la edad, su perfil de riesgo, así como el tiempo para construir el ahorro.

La iniciativa generalizada por el gobierno nacional es lograr una eficiente gestión de los recursos por parte de las administradoras de los fondos de pensiones con la intención de cumplir con las metas propuestas al final de cada periodo en la acumulación de los aportes de los afiliados.

Pregunta Problema

¿Cómo está determinado el portafolio óptimo para los usuarios del sistema pensional colombiano bajo el esquema multifondos?

1. Optimización de portafolios en el sistema pensional colombiano esquema multifondos (2013-2018)

1.1.Objetivo General

Proponer un portafolio de inversión óptimo para los usuarios suscritos a las entidades administradoras de fondos de pensiones privadas (AFP), para el periodo 2013 a 2018 de acuerdo a la normatividad colombiana vigente.

1.2.Objetivos específicos

- Estimar un portafolio de inversión que permita obtener la mejor combinación entre rentabilidad y riesgo para usuarios suscritos AFP entre 2013 a 2018.
- Aplicar los modelos autorregresivos con heterocedasticidad condicional para la selección de un portafolio óptimo por tipo de usuario suscrito AFP para el periodo 2013 a 2018
- Describir el comportamiento de los activos más tranzados en la bolsa de valores de Colombia el periodo 2013 a 2018

2. Justificación

Los aportes de los afiliados y/o inversionistas de las AFP son ahorros que prevalecen en el tiempo, estos inversionistas tienen el interés de que los activos en los cuales invierten tengan volatilidad y la seguridad de los retornos dependiendo de la permanencia del activo y del periodo establecido por parte del agente.

Al constituir un portafolio óptimo de inversión se pretende mantener una inversión de un activo que genera mayor rentabilidad al del periodo inicial prediciendo y estimando un riesgo por el cual el agente tenga la elección de continuar o liquidar el activo invertido. La medición del riesgo y la incertidumbre se centra en prácticas econométricas empleando series de tiempo que comprende la modelación de varianzas y covarianzas transitorias.

El esquema multifondos tiene como propósito mejorar las condiciones del sistema de pensiones obligatorias para los fondos privados de pensiones, considerando la edad y las características de cada usuario; definiendo así topes de inversión para tres tipos de fondos bien definidos por la jurisprudencia colombiana, en el cual lo conforman el fondo Conservador destinado a personas cercanas a pensionarse con un riesgo y nivel de rentabilidad baja, también se encuentra el fondo Moderado dirigido a personas dispuestas a perder parte de capital siempre y cuando puedan recuperarlo en un plazo mediano. Y por último está el fondo agresivo que pertenece a los usuarios dispuestos a tolerar una mayor cantidad de riesgo para tener, a largo plazo, mayores beneficios.

Este trabajo propone la ejecución del modelo generalizado de heterocedasticidad condicional autorregresiva (GARCH). (Bollerslev, 1986) Generaliza los modelos ARCH al proponer los modelos GARCH, porque es un modelo óptimo en una gran variedad de series

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

financieras, con la ventaja de su reducido número de parámetros a estimar. Esto quiere decir que se mantiene un comportamiento simétrico para perturbaciones positivas y negativas teniendo en cuenta las varianzas condicionales de períodos anteriores.

Estos modelos se valen de la cantidad de datos muestrales obtenidos para potenciar su capacidad, así entre más datos se utilicen mejores serán los resultados obtenidos, series de tipo financiero garantizan la abundancia de datos dado que estos se presentan de manera diaria, por esto se decide utilizar los datos que correspondan al valor de los activos seleccionados, a partir del primero de enero del 2013 (tomando en cuenta que para este año ya todas las AFP se encontraban funcionando bajo el esquema multifondos), hasta el treinta y uno de diciembre del 2018, por lo cual se cuentan con un total de 1825 datos muestrales para la realización del modelo.

El uso del modelo GARCH en la selección de activos para la composición de los portafolios garantiza una construcción del error más robusta y por tanto tiene una capacidad de predicción superior a los modelos habitualmente usados en la optimización de portafolios y por consecuencia una mejor selección de los activos; además de esto brindar una herramienta a los usuarios de las AFP que le permita mejorar su recaudo de cartera de inversión en el fondo de pensión, facilitaría la sostenibilidad completa del sistema, sin mencionar que tendría un enorme valor de uso tanto para las mesas de dinero de las AFP.

3. Marco Teórico

3.1. Elección de portafolios

La elección en condiciones de incertidumbre ha sido analizada utilizando escenarios probabilísticos como el expuesto por Daniel Bernoulli (1738), quien empíricamente explica como los agentes racionales toman decisiones en función de la utilidad que esperan obtener, sin embargo dentro de la modelación propone un juego de lanzamientos de moneda donde se llega a la conclusión de que se debe aceptar cualquier apuesta sin importar lo alto que sea el riesgo de la misma, *“cualquier incremento en riqueza, no importa cuán insignificante, siempre resultará en un incremento en utilidad que es inversamente proporcional a la cantidad de bienes ya poseídos”* (Bernoulli, 1738); sin embargo, esto resulta imposible de aceptar para cualquier agente racional, por lo cual se le atribuye su caracterización como la paradoja de San Petersburgo.

A partir del trabajo de Bernoulli, (Von Neumann & Morgenstern, 1944) estudian la teoría de la elección con información asimétrica donde los agentes del mercado tienen información distinta y por tanto toman decisiones de forma variada haciendo el uso racional de la información para obtener el mayor beneficio posible, propuesto así por (Akerlof, 1987).

La teoría de la información asimétrica utiliza dos estrategias básicas para los agentes el Signalling propuesto por (Spence, 1973), que es un escenario donde el agente con menos información juega primero para adelantarse a sus contrincantes y el screening propuesto por (Stiglitz, 1977) escenario en donde el jugador con más información toma acción primero

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

para asegurar el resultado esperado, en ambos casos cada jugador tratando de predecir las estrategias elegidas por el contrincante.

Por otra parte, (Marshack, 1933) Padre de la econometría, hizo avances importantes en lo que respecta a la teoría de la inversión en su artículo “El dinero y a la teoría de los activos”, en el cual hace el primer acercamiento puramente empírico a la inversión en portafolios a partir de la modelación econométrica de las series de tiempo, trabajo fuertemente nutrido por el desarrollo de las cadenas de (Márkov, 1907) y su explicación de cómo los datos en una serie de tiempo pueden estar relacionados entre sí, entonces la probabilidad de ocurrencia de un evento depende en cierta medida del evento ocurrido inmediatamente anterior, haciendo una diferenciación entre las cadenas de eventos independientes y estas series que parecen tener un tipo de “memoria” de ocurrencia, gracias a este aporte Marshack pudo identificar como las series financieras tienen esta característica específica para el desarrollo de su modelación empírica.

El paradigma central del estudio de la optimización de la teoría de optimización de portafolios de inversión se basa en el aporte realizado por (Markowitz, 1952) el cual asume la racionalidad de los inversionistas y a partir de la misma intenta modelar la toma de decisiones en lo que respecta a la composición de su portafolio bajo el criterio de análisis Media-Varianza (ANOVA), siguiendo esta lógica se dice que un portafolio es óptimo cuando ofrece el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad. Este modelo supone un antes y un después en el desarrollo de la teoría, dado que se convirtió en el punto de partida dentro del cual se sustenta la teoría de inversión en la actualidad.

La teoría de Markowitz explica la elección eficiente a partir de las correlaciones de los rendimientos entre los activos, la cual debe ser negativa y directa, razón por la cual la diversificación dentro del portafolio sirve como medio para reducir el riesgo a un nivel de

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

rentabilidad esperado, sin embargo, no se limita a escoger simplemente el portafolio con el mayor número de activos posibles para minimizar el riesgo, también añade el uso de las rentabilidades para la escogencia de un portafolio optimo y eficiente para un nivel de renta determinado.

Por tanto, el modelo de Markowitz se vale del promedio de los rendimientos esperados $E(r_p)$ que son el equivalente al promedio \bar{r}_p de los N rendimientos esperados de los activos ponderados individualmente según la importancia que tendrán dentro del portafolio W^T siendo W la matriz de ponderación dada a cada activo, de tal forma que el retorno esperado del portafolio estaba dado por:

$$E(r_p) = W^T E(r) \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^n W_i = 1$$

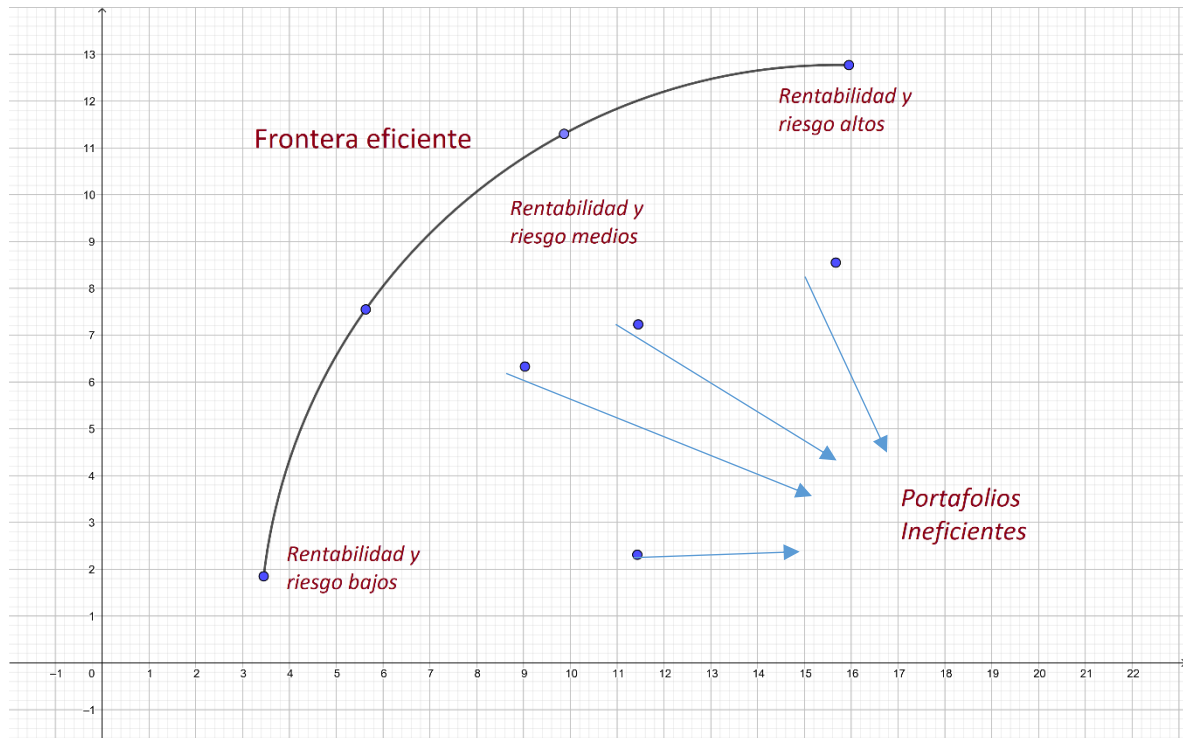
Y una varianza del portafolio $\sigma^2(r_p)$ dada por el producto la matriz transpuesta de las ponderaciones W^T multiplicada por Ω (Que es la matriz de varianza, covarianza del portafolio) y multiplicada por la matriz de las ponderaciones W de tal forma que:

$$\sigma^2(r_p) = W^T \Omega W = (W_1, W_2 \dots W_n) \begin{pmatrix} Var(i,i) & Cov(i,j) \dots & Cov(i,N) \\ Cov(j,i) & Var(j,j) \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(N,i) & Cov(N,j) \dots & Var(N,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$$

A partir de esto matriz construye una frontera eficiente (FE), compuesta por el conjunto de las combinaciones más eficientes entre rentabilidad y riesgo, ubicando una línea cóncava en el plano donde se ubican las rentabilidades óptimas para un determinado nivel de riesgo y cualquier punto debajo de la línea seria ineficiente en términos de un retorno menor al que suponen las demás combinaciones, como se puede observar en la siguiente gráfica.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Gráfico 1 Frontera Eficiente Markowitz Generalizada



Fuente: Elaboración propia mediante software GeoGebra

Estos modelos solían hacer uso de la estimación de volatilidad media a partir de los datos históricos de las series de los activos, bajo un análisis de utilidad esperada contra riesgo ($\mu - \sigma^2$), donde se entendía que la volatilidad era la desviación estándar de los rendimientos, sin embargo este cálculo se limitaba a periodos de tiempo cortos ya que se requería que los datos fuesen relevantes y de tomarse una serie de tiempo muy larga se corría el riesgo de que los datos menos relevantes generaran demasiada distorsión o ruido en los resultados.

Esta manipulación de datos se veía claramente reflejada en modelos como el modelo CAPM (Capital asset pricing model) y el modelo APT (Arbitrage pricing theory), los cuales combinaban el método de pronóstico de mínimos cuadrados y el enfoque de la

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

desviación estándar de las varianzas para generar resultados de carácter dudoso (Engle, 1982) Otro enfoque importante para la medición de riesgos financieros, son las basadas en las estructuras cuadráticas (Box & Jenkins, 1970) las cuales hacían uso de las aplicaciones de los modelos lineales auto regresivos (AR), auto regresivos de medias móviles (ARMA) y auto regresivos integrados de medias móviles (ARIMA), los cuales tomaron gran fuerza en el campo de la econometría debido a que los modelos de series financieras la volatilidad de un activo x en un periodo t suele depender de la volatilidad en los momentos anteriores (Comportamiento Auto regresivo) , además de esto también tenían la posibilidad de explicar estructuras de las series que se escapaban al entendimiento de la versión lineal de los modelos, ya que en las series financieras la varianza presenta fenómenos como la leptocurtosis (mayor concentración de los datos hacia la media causando la una distribución más apuntalada a la normal), el contagio en la serie (Periodos de alza de precios suelen venir acompañados con más periodos de alza y periodos de bajos retornos vienen acompañados por más periodos de bajos retornos) la asimetría entre los shock aleatorios de los periodos (la volatilidad aumenta con más fuerza en segmentos de tiempo donde los precios decrecen que en los periodos de crecimiento).

Un modelo autorregresivo de orden p , o AR (p) esta descrito como:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \Phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Donde Φ_1, \dots, Φ_p son los parámetros autorregresivos del modelo y ε_t es el término del error. Sujeto a las restricciones de los procesos estacionarios para que el modelo funcione de manera correcta.

Un modelo de medias móviles de orden q , o MA (q) está dado por:

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

Donde $\theta_1, \dots, \theta_p$ son los parámetros autorregresivos del modelo y ε_t es el término del error.

Y finalmente un modelo con p términos autorregresivos y q términos de media móvil resulta en una combinación de los modelos AR y MA, o dicho de otra forma ARMA (p, q) esta descrito por:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \Phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

Adicionalmente se entiende que los términos del error ε_t son datos tomados de una distribución normal de media cero $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$; y por tanto representan variables idénticamente distribuidas

En base a esto se consideró la posibilidad de hacer ponderaciones a las varianzas dándole una mayor ponderación a los datos más recientes que resultan igualmente más relevantes en la estimación de la varianza, y el primer acercamiento de esto lo realizó (Engle, 1982) quien generalizó la varianza muestral desarrollando los modelos condicionales heterocedásticos autorregresivos (ARCH, por sus siglas en inglés autoregressive conditional Heteroskedasticity Model). Donde el error (ε_t) en un momento t puede asumir una distribución normal, y está dado por:

$$\partial_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Por otro lado la volatilidad (o varianza condicional σ_t^2), depende de los parámetros objeto de la estimación ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$) la innovación o shock aleatorio que se

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

produce en la volatilidad ($\alpha_j \partial_{j-t}^2$) la cual se produce en el momento inmediatamente anterior, de tal forma que se puede definir como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_{i-t}^2$$

Donde los errores (ε_t), son variables idénticamente distribuidas entre cero y uno, $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$, y finalmente $i = 1, 2, \dots, m$.

Posteriormente estos modelos ARCH, fueron generalizados por (Bollerslev, 1986) dando origen a los modelos generalizados condicionales heterocedasticos auto regresivos (GARCH, por sus siglas en inglés generalized autoregressive conditional Heteroskedasticity Model); cuya estimación se vale del operador $vvec(\cdot)$ el cual permite descomponer la matriz de varianza condicional (Ω_t), tal que:

$$vvec(\Omega_t) = \Omega + \sum_{i=1}^q Avech(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}') + \sum_{j=1}^q Bvec(\Omega_{t-j})$$

Este operador aumenta la dificultad del modelo dado que no está garantizado que la matriz de varianza condicional estimada sea definida positivamente, además de esto la cantidad de parámetros a estimar es tan grande que implica un costo significativo en su implementación mediante herramientas como software especializado, lo cual ha llevado al desarrollo de nuevos métodos en la implementación de los modelos GARCH, que solucionan el problemas anteriormente mencionado, haciendo uso de los modelos GARCH univariados para la estimación de la matriz de varianza condicional, razón por la cual la familia de modelos GARCH se han convertido en la mejor herramienta para el estudio de las series de tipo financiero.

Aparición del sistema de seguridad social en Colombia y efectos de la ley 100 de 1993

Es precisamente que el descubrimiento del sistema de seguridad social en Colombia se remonta a 1945 y 1946, cuando se crearon la Caja Nacional de Previsión (CAJANAL) y el Instituto Colombiano de los Seguros Sociales (ICSS), hoy Instituto de Seguros Sociales (ISS). Las bases conceptuales e ideológicas se apoyaron inicialmente en la ley del seguro obligatorio, emitida en Alemania por el Canciller Otto Von Bismarck en 1883. *“En Colombia, las prestaciones de los trabajadores, pensiones, cesantías, salud y riesgos profesionales fueron reconocidas por la ley con antelación a la fundación del ICSS y de la CAJANAL. Para entonces eran llamadas prestaciones patronales.”* - (Jaramillo, 1994, págs. 184-185)

Luego, cuando se presentó la etapa de madurez industrial, las empresas comenzaron a advertir la imposibilidad financiera de pagar en forma directa la carga prestacional de las jubilaciones, la salud y el conglomerado de indemnizaciones y pensiones vitalicias por incapacidad causadas por accidentalidad en el trabajo y enfermedades profesionales, los empresarios y trabajadores pensaron en crear sistemas de seguros obligatorios semejantes a los europeos.

Esos factores, sumados al incremento de quiebras reales o fraudulentas de las empresas industriales, sugirieron la necesidad urgente de crear el sistema de seguridad social como un mecanismo organizacional independiente de las empresas, que se encargara de la dirección de las prestaciones y garantizara financieramente las obligaciones de los patronos y los derechos adquiridos por los trabajadores, independientemente de la solvencia o insolvencia económica de las empresas.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

La seguridad social apareció en aquel momento como el mecanismo institucional y financiero que garantizaba el acceso de los trabajadores a sus prestaciones sociales. En Colombia, el desarrollo de la seguridad social estuvo destacado por una fuerte diferenciación entre el sistema de los trabajadores privados, denominado de la seguridad social, y el de los funcionarios públicos, conocido como de la previsión social. Por consiguiente, el ICSS se convirtió en una entidad monopólica de afiliación del sector privado, creando en su interior un sistema de solidaridad entre las distintas regiones y ramas de la producción industrial.

La Ley 100/1993, que creó el nuevo Sistema general de Seguridad Social en Salud (SGSSS). El proceso de reforma fue liderado por los Ministerios de Salud y del Trabajo, con el apoyo del Departamento Nacional de Planeación (DNP) y el aval de las comisiones VII de Senado y la Cámara de Representantes. En estas leyes se adoptaron además otros principios para la reforma: equidad, unidad, obligatoriedad, protección integral, libre elección, autonomía institucional, calidad, descentralización, subsidiariedad, complementariedad, concurrencia y participación, cualidades que como los antecedentes históricos siguen siendo controversiales por su carácter inequitativo e ineficiente. (Rocha Buelvas , 2012, pág. 10)

En Colombia la ley permite la existencia simultánea del sistema público y el de fondos privados, que compiten entre sí, a partir de la reforma en el año 1993, durante el gobierno de César Gaviria, que creó el "Sistema General de la Seguridad Social Integral". Esta Ley elimina el papel central del Estado en la prestación de los servicios de la Seguridad Social, y establece un sistema de competencia basado en el ahorro individual que privatiza las pensiones. Aunque es importante indicar que cada trabajador puede elegir voluntariamente

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

la entidad que le prestara la atención médica o la que le gestionará sus aportes para pensiones.

Los efectos más relevantes que presentó la Ley 100 fueron:

Marcó la privatización de la seguridad social, mantiene la deuda histórica del gobierno con el Seguro Social calculada en un valor que supera los 40 billones de pesos y consagra dos sistemas: en salud, las Entidades Promotoras de Salud, EPS, e Instituciones Prestadoras de Servicios de Salud, IPS, estatales y privadas; y en materia de pensiones, el ISS y los Fondos de Pensiones Privados. Además, la cobertura pensional a nivel nacional, según datos del 2003, refieren que apenas alcanza al 24 por ciento. Uno de los efectos de la Ley 100 es que dejó los pensionados al ISS y los afiliados a los fondos privados. Y a diciembre 31 de 2003 el ISS tenía 1,9 millones de afiliados y 545.600 pensionados, mientras que los fondos privados tenían 11.445 pensionados. En tanto que las cotizaciones al fondo solidario de las ISS eran por \$2 billones cuando las pensiones le costaban \$5.2 billones. (consultorio contable, Universidad EAFIT, 2010, pág. 10)

Con la Ley 797 de 2003, promulgada por el presidente Álvaro Uribe, se introdujo cambios adicionales al régimen pensional. Entre las modificaciones se tiene en cuenta un aspecto importante que tiene que ver con la recapitalización del fondo común del ISS, y la racionalización de los recursos para poderle cumplir al ciudadano colombiano la cuota de su pensión establecida. Entre otros cambios se incluyen:

- Aumento en las tasas de cotización
- Ampliar la edad mínima de acceso a la pensión por cotización requerida.
- Reducción en las comisiones de los costos administrativos o de sostenimiento de las AFP

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- Obligatoriedad de afiliación a los trabajadores independientes.

Luego en la inclusión del Acto legislativo 001 de 2005 se acaban con los regímenes especiales que existían para el momento a excepción de la fuerza pública y del presidente de la República, los trabajadores pertenecientes a los regímenes eliminados se tuvieron que acomodar a las condiciones que se establecían generando pérdidas tanto en el valor de su pensión como en las semanas cotizadas. Más adelante en la colocación del régimen de ahorro individual con solidaridad (RAIS) o los llamados fondos privados de pensiones, se aumentan aún más la edad mínima de cotización requerida pasándola a 57 años para las mujeres y 62 años para los hombres, junto con la cantidad de semanas cotizadas pasando de 1000 semanas a 1200 semanas a partir del 2014.

3.2. Esquema multifondos

El esquema multifondos busca mejorar las condiciones del sistema de pensiones obligatorias para el régimen de ahorro individual con solidaridad (Fondos privados de pensiones) considerando la edad y las características de cada usuario, permitiendo la inversión en activos de perfiles de alto riesgo en carteras de riesgo similar, las que se espera en el largo plazo den una rentabilidad mayor, caso contrario al de las personas de mayor edad y con mayor proximidad a pensionarse y con menor propensión al riesgo inviertan en carteras adversas al riesgo que no comprometan la integridad del dinero de los fondos; definiendo así topes de inversión para tres tipos de fondos bien definidos por la jurisprudencia colombiana:

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- **Fondo Conservador:** Compuesto generalmente por personas cercanas a la edad proyectada para pensionarse, razón por la cual son agentes con mayor aversión al riesgo aun a costa de menores rendimientos.
- **Fondo Moderado:** Compuesto por personas que estarían dispuestas a tolerar pérdidas en el capital dentro del fondo con tal de obtener un beneficio mayor en el plazo medio.
- **Fondo Agresivo:** Este fondo está constituido por aquellos usuarios que aceptarían inversiones de alto riesgo dado que en el largo plazo se espera este produzca mayores rendimientos.

Para el análisis del presente estudio se respetan los topes de cartera de inversión para cada tipo de activo, eligiendo la participación de cada tipo de activo para cada uno de los agentes como se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1 clasificación de activos

Tipo de Activo	Conservador	Moderado	Agresivo
Activos Locales			
Renta Fija Local	60%	60%	60%
Renta variable local.	15%	30%	30%
Deuda Pública local.	70%	50%	50%
Capital privado	15%	30%	30%
Activos Extranjeros			
Renta fija extranjera.	40%	60%	70%
Renta variable extranjera.	40%	60%	70%

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Deuda Pública extranjera.	40%	60%	30%

Fuente: elaboración propia con datos de la superintendencia financiera

La ley exige a los usuarios pertenecientes a cada fondo respetar estos topes de inversión, limitando la cantidad máxima que pueden invertir en cada activo según su tipo, lo cual intrínsecamente define el riesgo sistémico que le conllevaría invertir en el mismo, además de esto se debe tener en cuenta que la inversión en activos de tipo internacional está condicionada por la poca participación que estos tienen dentro de la Bolsa de Valores de Colombia.

4. Metodología

En primera instancia, se seleccionarán los activos según el movimiento de estos dentro del mercado financiero colombiano, seleccionando así aquellos que se hayan transado con mayor frecuencia dentro del periodo seleccionado, tomando en cuenta las bases de datos de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC)¹, Investing², Yahoo finanzas³ y la base de Trading Economics⁴, en donde se puede encontrar el histórico de los activos colombianos en relación a la moneda patrón (Peso Colombiano COP).

La frecuencia de recolección de los datos tomara valores diarios de los activos seleccionados desde el 1 de enero del 2013 hasta el 1 de enero del 2019 para la posterior

¹ <https://www.bvc.com.co/nueva/>

² <https://es.investing.com/>

³ <https://es.finance.yahoo.com/?guccounter=1>

⁴ <https://tradingeconomics.com>

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

construcción de las respectivas bases de datos, para la posterior elaboración de las tablas de estadística descriptiva de los activos y algunas pruebas gráficas que nos permitan establecer algunos hechos estilizados sobre los activos.

Posteriormente se construirá la frontera eficiente de los activos y riesgos, sin tomar en cuenta ninguna de las restricciones que impone la legislación colombiana para después construir las varianzas mínimas condicionales para cada una de las series de retornos de los activos, usando modelos GARCH (p, q) , con el propósito de estimar la matriz de covarianza condicional.

La metodología consiste en usar los criterios de información Akaike (AIC), el Bayesiano (BIC) y Hannan-Quinn (HQC) dados por:

$$AIC = \frac{2K}{n} - 2 \frac{\ln L}{n}$$

$$BIC = \frac{K \ln n}{n} - 2 \frac{\ln L}{n}$$

$$HQC = n \log \left(\frac{RSS}{n} \right) + 2k \log \log n$$

Donde L es la verosimilitud, n es el número de observaciones, k es el número de parámetros estimados en el modelo y RSS es la suma residual de cuadrados que resulta de una regresión lineal, escogiendo aquellos que satisfagan los supuestos de no autocorrelación de los residuos y los residuos al cuadrado (El menos valor de AIC, BIC y HQC), para modelos ARCH Y GARCH.

Basado en los resultados se estimará el orden de AR (p) que mejor satisfaga GARCH (p, q) para la modelación del error de la serie y la posterior aplicación de las pruebas de estacionariedad, autocorrelación nula y normalidad en el modelo y posible corrección de

estas para al final construir la cartera de inversiones esta vez sujeta a las restricciones que impone la jurisprudencia colombiana.

5. Revisión De Autores

En materia académica, la optimización de portafolios de inversión ha sido el objetivo de estudio, razón por la cual para este estudio se tomaron como referentes literarios a aquellos autores que incluyeran el uso de métodos cuantitativos y a los que consideraran de alguna forma la evolución histórica del mercado financiero colombiano y las transacciones realizadas dentro del mismo.

Rueda (2005) hace uso del enfoque técnico gracias al estudio del comportamiento de un indicador para predecir su comportamiento mediante técnicas estadísticas y matemáticas, a partir de la cual hace una breve descripción de cómo operan los mercados financieros colombiano, además de su historia y las transacciones realizadas dentro del mismo.

Trabajos como el de (Dubova, 2005), demuestran que *“la amplitud de diversificación y el desempeño de los portafolios óptimos en el caso colombiano dependen, por un lado, del grado de eficiencia del mercado y su comportamiento y, por el otro, de los ciclos económicos y del índice de la tasa libre de riesgo⁵* Sin embargo, la metodología del trabajo nos permite observar que los resultados obtenidos por el mismo no son los suficientemente robustos, gracias a (Castaño 2006) presenta una revisión del modelo anterior, pero con una corrección de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH), lo que nos permite

⁵ Dubova, Irina, *La validación y aplicabilidad de la teoría de portafolio en el caso colombiano. Cuadernos de Administración; 2005, 18 (julio-diciembre)*

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

observar algunas características estadísticas interesantes de las series, por ejemplo estacionariedad en la media pero no en la varianza, esto se traduce en un mercado que no es constante a lo largo del tiempo pero si es cíclico, resaltando la capacidad que tiene los usuarios más experimentados para prevenirse ante sucesos de mercado con algún comportamiento repetitivo, además resalta la importancia del IGBC como instrumento de estudio de los activos del mercado Colombiano por reflejar de manera apropiada el comportamiento de los mismos.

Trabajos como el de Botero (2008) se preocupan más por el estudio de las series de tiempo mediante la creación de modelos de regresión aplicada a las series de tiempo de la bolsa de valores de Colombia, donde se retoma el paradigma habitual entre la dicotomía de comportamiento ideal entre rentabilidad y riesgo donde se puede ver que las intervenciones del ente regulador afectan de manera negativa la volatilidad del activo durante el periodo de ocurrencia.

También encontramos métodos de programación lineal aplicada al modelo de Markowitz para optimizar la función objetivo del portafolio (bien sea minimizando el riesgo o maximizando el retorno), tal y como lo plantea Martínez (2011), comparando el portafolio de inversión normal al que propone el sistema pensional del esquema multifondos vigente para ese entonces. Sin embargo, el mismo reconoce que los resultados no sean del todo confiables dado que no se cuentan con la cantidad de datos suficientes para realizar mejores estimaciones que demuestren la eficiencia del método en el largo plazo. Esto es lo que se denomina la incapacidad para satisfacer la extensión de la serie de tiempo observada en trabajos como el de (Reveiz & Leon, 2008) Quienes además de esto, demuestran:

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Que el marco regulatorio de las inversiones de los FPO restringe el retorno esperado, volatilidad y demás momentos de la distribución de los retornos de los portafolios de las AFP. Dicho marco regulatorio reduce el acceso de los administradores a niveles superiores de retorno por unidad de riesgo (razón de Sharpe) y a mayores beneficios de diversificación.

Además de esto podemos encontrar los modelos de valoración de activos como en el trabajo de G. Zanabria (2007), que miden el desempeño de las administradoras de portafolio y de las inversiones realizadas, en términos de sus retornos y de sus riesgos con modelos de gestión de riesgo, atribuyendo los resultados del mismo a variables macroeconómicas y financieras, demostrando la importancia de la eliminación del riesgo sistemático, mediante la diversificación del portafolio de inversión; resultados que pueden ser corroborados por trabajos más específicos como el de Rubio (1987) quien realiza un estudio a partir de los modelos CAMP (Capital Asset Pricing Model) y APT (Arbitrage Pricing Theory), modelos donde las tasas de retorno obtenidas mediante las variaciones del valor del activo son utilizadas para estimar correctamente el precio esperado del activo riesgoso al final del periodo, descontado a la tasa de riesgo sistemático, siendo el método de cálculo de la tasa la única diferencia entre estos dos modelos.

Respecto a la experiencia extranjera podemos encontrar trabajos como el de Aldunate (2011), quien estudio la rentabilidad real alcanzada por las administradores de fondos de pensiones en función de los riesgos incurridos por los usuarios en la gestión de sus propios ahorros, midiendo la eficacia de la gestión de las AFP apoyada en los resultados de un estudio bajo los criterios de Varianza (ANOVA) y los criterios del modelo de Markowitz (Media Varianza), donde se estilizan datos importantes como las rentabilidades, retornos y volatilidades, finalmente realiza un estudio de comparación entre dos variables

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

(rentabilidad, volatilidad) calculando el coeficiente de variación de cada fondo y cada AFP. Bajo la hipótesis clásica de que, para un menor coeficiente de variación, menor sería el riesgo sistémico de la inversión. Gracias a esto concluye que las AFP en Chile han conseguido la conformación de carteras de inversión óptimas salvo pequeñas inconsistencias en dos de las cinco carteras estudiadas; Este trabajo fue determinante en la aplicación del esquema multifondos en Colombia, ya que al ser el primer trabajo de orden empírico que demostrara la eficiencia del esquema multifondos, apresuro la ejecución del mismo en el país, aunque se debe tener presente que está ya se había aprobado con anterioridad.

Sin embargo, en el ambiente nacional se encuentran resultados donde las carteras de inversión son ineficientes consecuencia de la falta de diversificación, lo cual las lleva a perder alrededor de un 1% en la rentabilidad anual en promedio y por consiguiente alrededor de un 30% del valor final de la pensión proveniente de la cuenta de ahorro individual tal y como lo sugieren Jara, Gómez y Pardo (2005); haciendo referencia a este trabajo, Roldós (2006) asegura que los portafolios actuales de las AFP requieren de una mayor inversión en activos externos ya que la tasa de exposición a estos actualmente es relativamente frenen al óptimo obtenido por la experiencia chilena donde alrededor de un 50% de los activos estaban compuesto de cartera internacional.

Para este mismo año se encuentran estudios que demuestran que la regulación nacional tiene limitaciones que impiden una diversificación eficiente de los portafolios y por tanto una pérdida en la rentabilidad de la cuenta de ahorro individual como lo sugieren Jara, Gómez y Murcia (2006), este se ve reflejado en la alta participación que tiene en los portafolios los títulos gubernamentales cercana al 50% concentrados en riesgo de mercado y créditos nacionales.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Esta concentración de activos locales que mantiene las volatilidades altas, el riesgo sistémico por la poca diversificación y las bajas tasas cobradas por las administradoras de los fondos de pensión, son consideradas como un incentivo negativo para las AFP a invertir de manera eficiente, según Martínez y Murcia (2007) este fue el incentivo principal para el cambio hacia el sistema del esquema multifondos.

6. Desarrollo Conceptual

6.1. Selección de activos y hechos estilizados

Para el desarrollo del trabajo los activos seleccionados se caracterizaron en siete grupos distintos de acuerdo con sus características individuales, esto con el fin de facilitar el análisis de resultados y para crear un insumo que nos permita entender el comportamiento de manera más sencilla, estos se dividen en dos familias según si cotizan en la bolsa colombiana o no, primero los activos locales (Renta fija local, renta variable local, deuda pública local y capital privado) y en segundo lugar activos extranjeros (renta fija extranjera, renta variable extranjera, deuda pública extranjera).

A partir de estas clasificaciones se buscaron entre dos y tres activos de cada una bajo dos criterios específicos, en primer lugar, los activos con un mayor volumen de transacción desde el primero de enero del 2013 hasta el primero de enero del 2019 (las fechas base de la toma de datos muestrales), y en segundo lugar activos que fueran usados por las AFP en sus fondos de inversión con porcentaje representativo sobre la total inversión de la cartera dentro de cada uno de los portafolios usados por estas, el resultado de esta selección fueron los activos contenidos en la siguiente tabla, donde además se hace aclaración de a qué

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

familia de activos corresponden, a que grupo pertenecen y una abreviación la cual es vital tener presente para la lectura del presente documento:

Tabla 2 activos seleccionados con su respectiva abreviación

Tipo de Activo	Nombre del activo	Abreviación⁶
Activos locales		
Renta Fija Local	CDT Bancolombia a 1 año	BCCDT
	Global X MSCI Colombia ETF	GXG
Renta variable local.	Bancolombia preferencial	BCOL
	Banco Davivienda Preferencial	DAV
	Banco d Bogotá S. A.	BBO
Deuda Pública local.	Rentabilidad Bono del Tesoro Colombia TES a 10 años	COLT10Y
	Rentabilidad Bono del Tesoro Colombia TES a 5 años	COLT5Y
Capital privado	Interconnection Electric S. A. ESP	ISA
	Grupo de Inversiones Suramericana S. A.	SIS
	Ecopetrol S. A.	ECO
Activos Extranjeros		
Renta fija extranjera.	iShares MSCI Emerging Markets	ISH
	Vanguard Short-Term Corporate Bond ETF	VSCH
Renta variable extranjera.	Cemex Latam Holdins S. A.	CLH
	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria S. A.	BBV
	Avianca Holdings Preferencial	AVI

⁶ A partir de ahora nos referiremos a cada activo por su abreviación para facilitar el entendimiento del documento.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Deuda Pública extranjera.	Rentabilidad Bono del Tesoro Estados Unidos 10 años	TUS10Y
	Rentabilidad Bono del Tesoro México 10 años	MEXT10Y

Fuente: elaboración propia

Para el desarrollo del ajuste de modelos se realizó una tabla diagnóstica de la presencia de los hechos estilizados en cada una de las series de datos utilizadas. En esta se puede dar un primer vistazo al comportamiento de las 1291 observaciones reunidas por cada activo y obtener algunos datos estadísticos útiles al momento del análisis⁷.

Tabla 3 Hechos estilizados

Activo	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación Estándar	Varianza	Curtosis	Simetría
BCOL	20300	36200	28457.71	3104844	9640056	2681171	0.1444109
SIS	29600	44300	37377.64	2665027	7102370	310452	-0.384971
DAV	20180	37800	28203.32	3798512	1.44e+07	2110369	0.182312
ISA	5420	15100	10087.9	2435.49	5931612	1893169	0.5484041
ECO	881	5710	2540336	1224512	1499430	2174579	.5810695
BBO	53915.9	73259.9	64030.83	4681874	2.19e+07	1684266	-0.177306
TUS10Y	1358	3239	2345986	0.4119354	0.1696908	2246664	-0.065576
ISH	28.25	52.08	4036977	4464637	1993298	2756442	-0.254950
CLH	3470	19820	12357.71	3215728	1.03e+07	328299	-0.199540
MEXT10Y	0	9.24	6448136	0.9337455	0.8718806	3961668	0.4197974
BBV	4537	9379	7051443	1191397	1419428	2022796	-0.144983
AVI	1445	4645	3083748	835.74	698461.3	1887964	-0.012527
COLT10Y	4695	9045	6875925	0.7583832	0.5751451	4345795	-0.258488
VSCH	77.54	81.01	796175	0.7750706	0.6007345	3116524	-0.993557
GXG	6.66	22.59	1280997	4714582	2222729	1920868	0.7522307
COLT5Y	4401	8.54	623596	0.7723023	0.5964509	3344729	0.3310504
BCCDT	95386	109.84	1009282	1644342	2703859	8080356	0.1638818

Fuente: Elaboración propia con ayuda de software Stata

⁷ En el Anexo 1 se encontrarán los comandos utilizados en el programa Stata para correr completamente el modelo copiados desde el archivo Do-file del programa.

6.2. Metodología ARCH y GARCH

Los modelos ARCH permiten usar los valores estimados de los residuos al cuadrado arrojados por una serie de tiempo para especificar la varianza de las perturbaciones en una regresión, tal que la media condicional este dada por:

$$y_t = x_t\beta + \varepsilon$$

La varianza condicional es una función de los residuos al cuadrado (o innovaciones) previos no anticipados (ε_t^2), por la tanto queda descrita de la forma:

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_2\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^m \gamma_i\varepsilon_{t-i}^2$$

Donde ε_t está distribuido como $N(0, \sigma^2)$ y γ_t son los parámetros ARCH.

Para este caso se escogió un modelo GARCH dado que este resulta ser el más apropiado para el desarrollo del modelo, el cual se especifica en su forma general como:

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + (\gamma_1 + \delta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + (\gamma_2 + \delta_2)\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + (\gamma_k + \delta_k)\varepsilon_{t-k}^2 + w_t - \delta_1w_{t-1} - \delta_2w_{t-2} - \delta_3w_{t-3}$$

De tal forma que el ruido blanco (w_t) sea fundamental para los residuos al cuadrado (ε_t^2) o, dicho de otra forma:

$$w_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$$

La especificación de la media condicional permite que esta sea modelada con algunos parámetros y pueden incluirse dentro de la regresión los términos autorregresivos y de media móvil a modo de un proceso ARMA o ARIMA común.

Para ajustar los modelos se procedió a calcular los retornos logarítmicos (R_i) de cada activo dado que estos resultan en una realización mucho más confiable al momento de

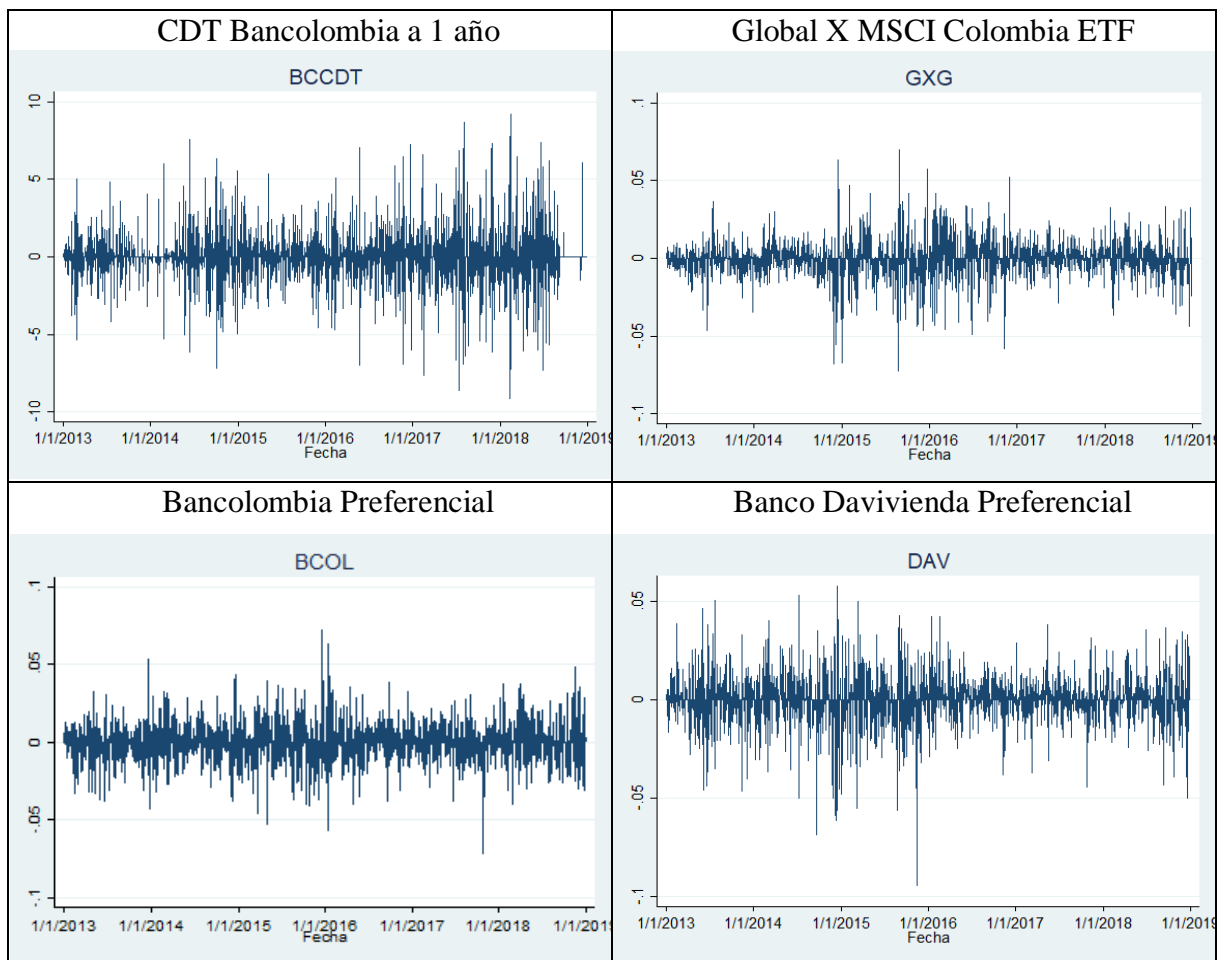
OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

armar la matriz de varianza covarianza dentro del modelo y analizar los resultados de esta, estos retornos están dados por:

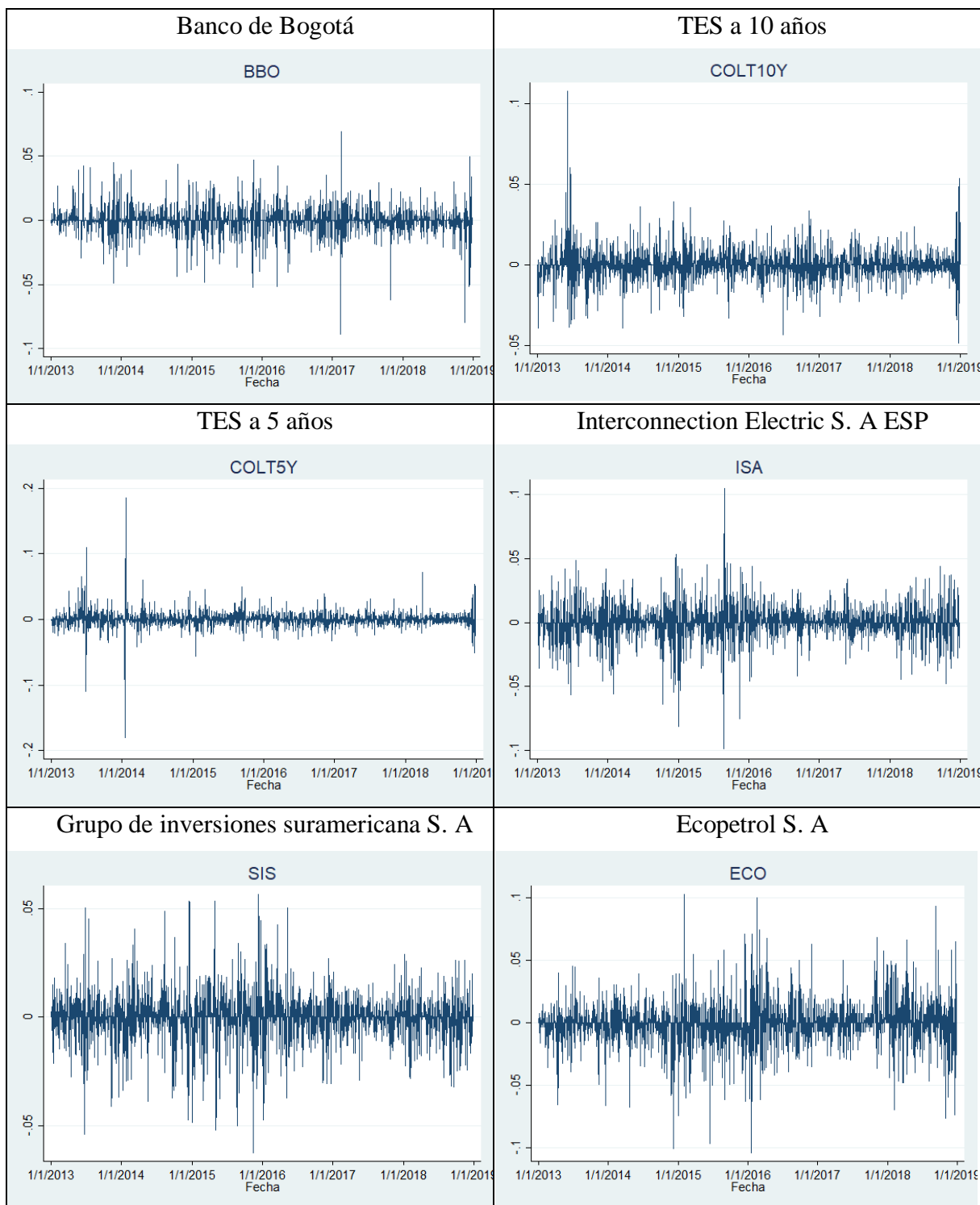
$$R_i = \log\left(\frac{P_i}{P_j}\right)$$

Donde P_i y P_j son los precios del activo en los momentos (i,j) con $i = j-1$; los resultados se pueden observar en la figura con las volatilidades de cada activo donde se puede observar el comportamiento de las series de los retornos de cada activo que se presenta a continuación:

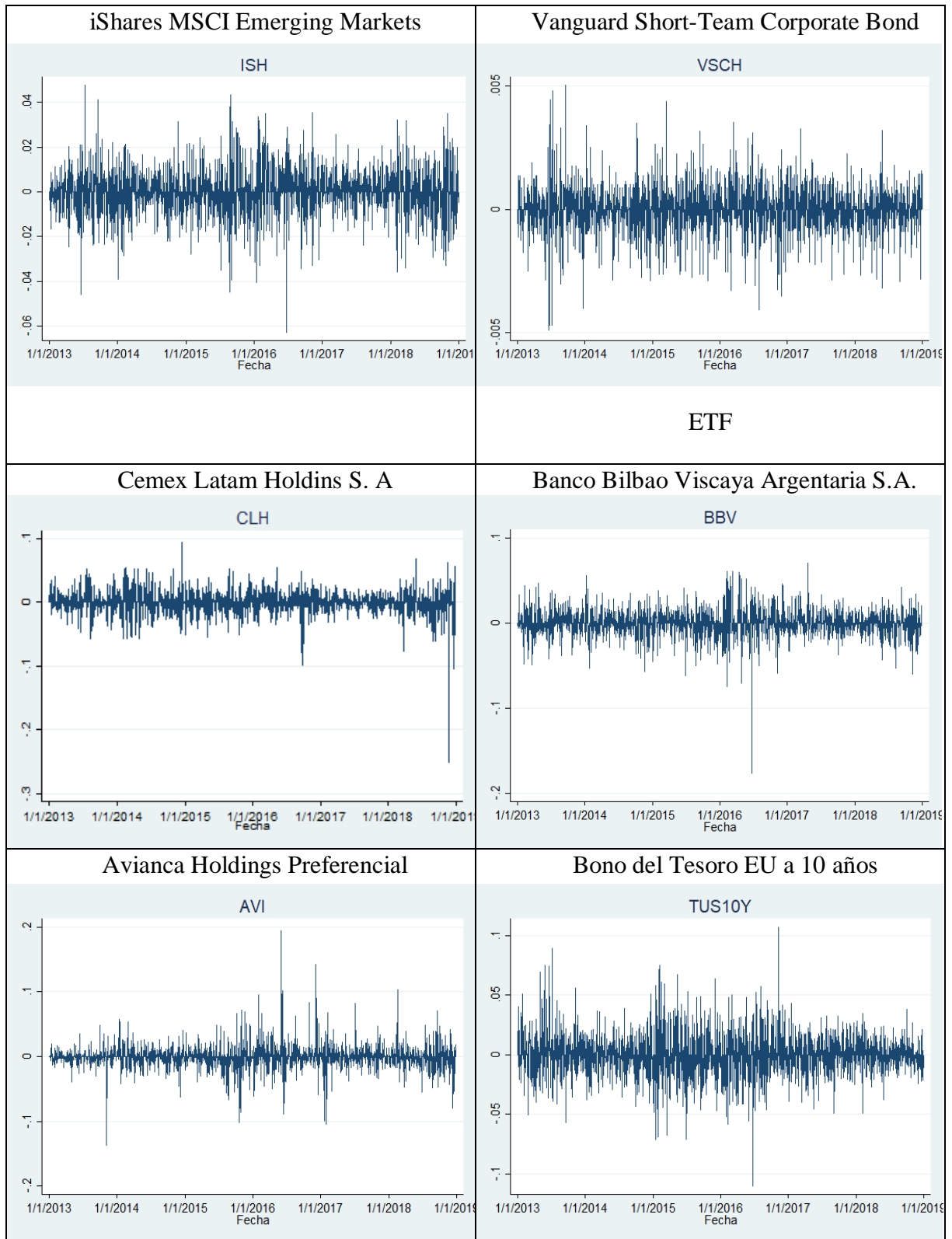
Gráfico 2 volatilidad de cada activo

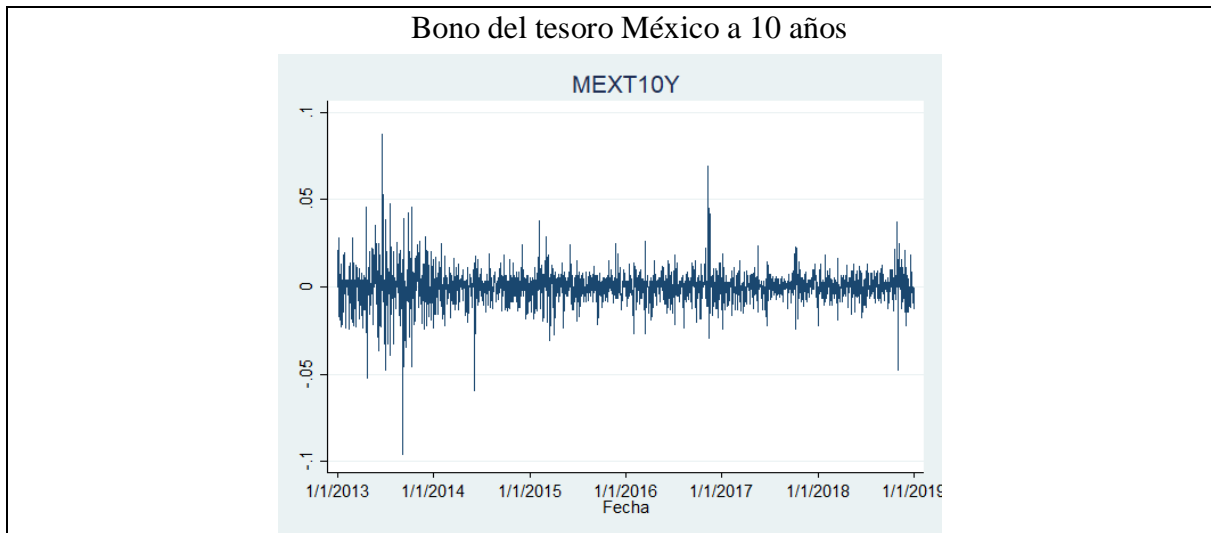


OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES



OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES





Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Stata

Se puede observar en las gráficas de los retornos que todas las volatilidades cumplen con la condición de ser estacionarios en la media⁸, pero no en la varianza⁹ esto es un requisito clave para la ejecución del modelo GARCH, debido a que permite evidenciar la presencia de efectos estocásticos.

Una vez hecho esto se aplicó el modelo GARCH (p, q) a cada uno de los retornos de los activos, escogiendo las mejores combinaciones de p y q con base a los criterios de información AIC, BIC Y HQC para asegurar el modelo GARCH con orden (p, q) que tuviera el mejor comportamiento estadístico. Como resultado obtuvimos las siguientes especificaciones de los modelos para cada activo:

- **BCCDT**, Modelo AR (1) - GARCH (1,1)

$$y_t = 0,0367109y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 1,83668 + 0,4012754\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0065595\sigma_{t-1}^2$$

- **GXG**, Modelo AR (1) - GARCH (2,2)

⁸ Se puede evidenciar que es estacionario en la media ya que todos los puntos de las gráficas tienden a converger hacia la media después de cada perturbación.

⁹ Los picos observables en las gráficas tienen distancias distintas de distorsión de onda respecto a la media por tanto no hay estacionariedad en la varianza.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

$$y_t = -0,0003206y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,000193 + 0,0518498\varepsilon_{t-1}^2 + 0,9360768\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0044068\sigma_{t-1}^2 + 0,0054268\sigma_{t-2}^2$$

- **BCOL**, Modelo AR (1) - GARCH (2,2)

$$y_t = 0,000187y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,0001272 - 0,0175486\varepsilon_{t-1}^2 + 0,052692\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0049674\sigma_{t-1}^2 + 0,28664\sigma_{t-2}^2$$

- **DAV**, Modelo AR (1) - GARCH (3,5)

$$y_t = 0,0002138y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,0000307 + 0,0514707\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0488809\varepsilon_{t-2}^2 + 0,043156\varepsilon_{t-3}^2 + 0,0094424\sigma_{t-1}^2 + 0,0097313\sigma_{t-2}^2 + 0,099293\sigma_{t-3}^2 + 0,0041261\sigma_{t-4}^2 + 0,0071872\sigma_{t-5}^2$$

- **BBO**, Modelo AR (1) - GARCH (1,1)

$$y_t = -0,0001363y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,0000738 + 0,141835\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0229323\sigma_{t-1}^2$$

- **COLT10Y**, Modelo AR (1) - GARCH (1,1)

$$y_t = 0,000036y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,0000319 + 0,745128\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0059229\sigma_{t-1}^2$$

- **COLT5Y**, Modelo AR (1) - GARCH (2,2)

$$y_t = 0,0001966y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,000412 + 0,0852064\varepsilon_{t-1}^2 + 0,6138972\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0090875\sigma_{t-1}^2 + 0,0390563\sigma_{t-2}^2$$

- **ISA**, Modelo AR (1) - GARCH (4,6)

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

$$y_t = 0,0002037y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & 0,00000842 + 0,1419023\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0362475\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0689539\varepsilon_{t-3}^2 \\ & + 0,558144\varepsilon_{t-4}^2 + 0,0185649\sigma_{t-1}^2 + 0,0078646\sigma_{t-2}^2 \\ & + 0,0084906\sigma_{t-3}^2 + 0,0101958\sigma_{t-4}^2 + 0,0093754\sigma_{t-5}^2 \\ & + 0,0148209\sigma_{t-6}^2 \end{aligned}$$

- **SIS**, Modelo AR (1) - GARCH (2,2)

$$y_t = -0,000358y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & 0,0000965 + 0,1448296\varepsilon_{t-1}^2 - 0,0028261\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0191052\sigma_{t-1}^2 \\ & + 0,0063433\sigma_{t-2}^2 \end{aligned}$$

- **ECO**, Modelo AR (1) - GARCH (3,3)

$$y_t = -0,00004059y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & 0,000527 - 0,0469399\varepsilon_{t-1}^2 + 0,3747745\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0546925\varepsilon_{t-3}^2 \\ & + 0,0270301\sigma_{t-1}^2 + 0,480076\sigma_{t-2}^2 + 0,0478703\sigma_{t-3}^2 \end{aligned}$$

- **ISH**, Modelo AR (1) - GARCH (3,3)

$$y_t = 0,000483y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & 0,000349 + 0,2072097\varepsilon_{t-1}^2 + 0,3618252\varepsilon_{t-2}^2 + 0,2963668\varepsilon_{t-3}^2 \\ & + 0,0875121\sigma_{t-1}^2 + 0,110261\sigma_{t-2}^2 + 0,1092857\sigma_{t-3}^2 \end{aligned}$$

- **VSCH**, Modelo AR (1) - GARCH (1,1)

$$y_t = -0,00002y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,000170 + 0,9527391\varepsilon_{t-1}^2 + 0,0060753\sigma_{t-1}^2$$

- **CLH**, Modelo AR (1) - GARCH (1,1)

$$y_t = -0,0004683y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,0001394 + 0,2399355\varepsilon_{t-1}^2 + 0,1956533\sigma_{t-1}^2$$

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- **BBV**, Modelo AR (1) - GARCH (2,2)

$$y_t = -0,0001291y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= 0,000211 + 0,0896164\varepsilon_{t-1}^2 + 0,8606538\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0402991\sigma_{t-1}^2 \\ &+ 0,398147\sigma_{t-2}^2\end{aligned}$$

- **AVI**, Modelo AR (1) - GARCH (4,5)

$$y_t = 0,08562y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= -0,0002016 + 0,02045202\varepsilon_{t-1}^2 + 0,4405922\varepsilon_{t-2}^2 + 0,2425049\varepsilon_{t-3}^2 \\ &+ 0,4779662\varepsilon_{t-4}^2 + 0,0493868\sigma_{t-1}^2 + 0,055977\sigma_{t-2}^2 \\ &+ 0,0699937\sigma_{t-3}^2 + 0,0538355\sigma_{t-4}^2 + 0,030634\sigma_{t-5}^2\end{aligned}$$

- **TUS10Y**, Modelo AR (1) - GARCH (6,6)

$$y_t = 0,0001742y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= 0,0000834 + 0,7543441\varepsilon_{t-1}^2 + 0,3065782\varepsilon_{t-2}^2 + 0,5002485\varepsilon_{t-3}^2 \\ &- 0,61224208\varepsilon_{t-4}^2 + 0,48322\varepsilon_{t-5}^2 + 0,9340002\varepsilon_{t-6}^2 \\ &+ 0,0189896\sigma_{t-1}^2 + 0,0132049\sigma_{t-2}^2 + 0,0100385\sigma_{t-3}^2 \\ &+ 0,0202844\sigma_{t-4}^2 + 0,0046097\sigma_{t-5}^2 + 0,0059047\sigma_{t-6}^2\end{aligned}$$

- **MEXT10Y**, Modelo AR (1) - GARCH (5,6)

$$y_t = 0,0001441y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= 0,00001 + 1,369948\varepsilon_{t-1}^2 - 0,06366401\varepsilon_{t-2}^2 + 0,0196147\varepsilon_{t-3}^2 \\ &+ 0,7160933\varepsilon_{t-4}^2 - 1,327889\varepsilon_{t-5}^2 + 0,0263316\sigma_{t-1}^2 \\ &+ 0,0261989\sigma_{t-2}^2 + 0,0215997\sigma_{t-3}^2 + 0,025497\sigma_{t-4}^2 \\ &+ 0,0252995\sigma_{t-5}^2 + 0,0211841\sigma_{t-6}^2\end{aligned}$$

6.3. Validación de Supuestos

6.3.1. Prueba Dickey-Fuller

La prueba Dickey-Fuller es una prueba de estacionariedad que mide las raíces unitarias en una serie de tiempo. Si se parte de un modelo de la forma:

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t$$

Donde $-1 \leq \rho \leq 1$, por lo que si $\rho = 1$ habría una raíz unitaria; entonces la prueba Dickey-Fuller parte de la siguiente regresión:

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^t u_i + a_0 t$$

Donde $a_0 t$ es el término que depende de la tendencia de los errores en los periodos pasados, y $y_0 + \sum_{i=1}^t u_i$ es el cambio producido por shocks aleatorios (estocásticos) impredecibles en el modelo.

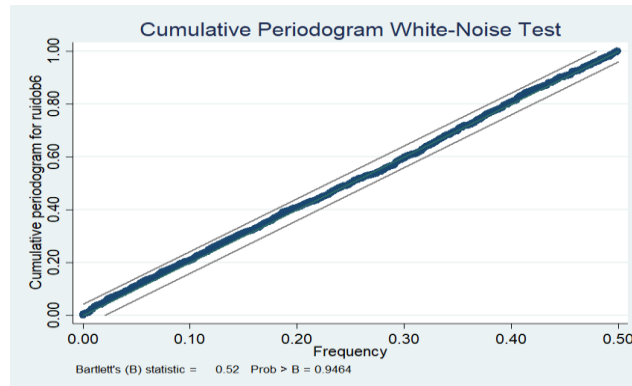
6.3.2. Prueba de Ruido Blanco

Adicionalmente se realizaron las pruebas gráficas de Ruido Blanco (BBO), la cual consiste en construir un periodograma de los retornos de cada activo como se puede observar en la siguiente gráfica y verificar si estos sobrepasan los límites de frecuencia de señal dados en la gráfica se dice que no hay ruido blanco, por el contrario, si no los

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

sobrepasan hay ruido blanco el cual es una condición deseable en los modelos estocásticos, a continuación podemos observar un ejemplo del periodograma¹⁰:

Gráfico 3 prueba de ruido blanco generalizada



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Stata

Basados en la información de estas dos pruebas se construyó la siguiente tabla:

Tabla 4 Resultados pruebas Dickey- Fuller y Ruido blanco

Activo	Prueba Dickey- Fuller (Valor Estadístico)	Ruido blanco
AVI	Estacionaria (45,606)	SI
BBO	Estacionaria (54,711)	SI
BBV	Estacionaria (45,550)	SI
BCCDT	Estacionaria (70,995)	SI
BCOL	Estacionaria (46,113)	SI
CLH	Estacionaria (43,382)	SI
COLT5Y	Estacionaria (45,668)	SI
COLT10Y	Estacionaria (47,701)	SI
DAVI	Estacionaria (48,779)	SI
ECO	Estacionaria (46,965)	SI
GXG	Estacionaria (41,744)	SI
ISA	Estacionaria (47,075)	SI
MEX10	Estacionaria (45,081)	SI
ISH	Estacionaria (46,928)	SI
TUS10Y	Estacionaria (49,075)	SI
SIS	Estacionaria (44,876)	SI
VSCH	Estacionaria (47,164)	SI

Fuente: elaboración propia

¹⁰ Los periodograma de cada activo los podrá encontrar en el Anexo 2

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Como se puede observar todos los activos tienen componente estacionario en la media y adicionalmente los modelos presentan Ruido blanco, estas dos son condiciones deseables para los modelos GARCH ya que gracias a estas se puede concluir que el modelo tiene un comportamiento apropiado y por tanto se puede confiar en la robustez de este. Gracias los resultados del modelo y de la validación podemos proceder a construir la matriz de varianza-covarianza condicional la cual es nuestro principal insumo para desarrollar el modelo de Markowitz, la cual se puede observar a continuación:

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Tabla 5 Matriz varianza - covarianza

	BCOL	SIS	DAV	ISA	ECO	BBO	TUS10 Y	ISH	CLH	MEXT10 Y	AVI	COLT10 Y	VSCH	GXG	COLT5 Y	BBV	BCCDT
BCOL	0,01323 %	0,00425 %	0,00409 %	0,00334 %	0,00541 %	0,00128 %	0,00207 %	0,00369 %	0,00275 %	0,00073% %	0,00286 %	0,00053 %	0,00001 %	0,00545 %	0,00061 %	0,00408 %	0,00124 %
SIS	0,00425 %	0,01120 %	0,00449 %	0,00524 %	0,00564 %	0,00156 %	0,00135 %	0,00205 %	0,00385 %	0,00049% %	0,00233 %	0,00075 %	0,00002 %	0,00517 %	0,00098 %	0,00213 %	0,00057 %
DAV	0,00409 %	0,00449 %	0,01418 %	0,00419 %	0,00440 %	0,00211 %	0,00177 %	0,00270 %	0,00348 %	0,00032% %	0,00325 %	0,00055 %	0,00001 %	0,00520 %	0,00051 %	0,00222 %	0,00031 %
ISA	0,00334 %	0,00524 %	0,00419 %	0,01601 %	0,00496 %	0,00134 %	0,00150 %	0,00229 %	0,00284 %	0,00031% %	0,00287 %	0,00102 %	0,00001 %	0,00494 %	0,00040 %	0,00220 %	0,00009 %
ECO	0,00541 %	0,00564 %	0,00440 %	0,00496 %	0,02886 %	0,00250 %	0,00403 %	0,00506 %	0,00325 %	0,00086% %	0,00324 %	0,00227 %	0,00003 %	0,00973 %	0,00242 %	0,00425 %	0,00000 %
BBO	0,00128 %	0,00156 %	0,00211 %	0,00134 %	0,00250 %	0,00992 %	0,00097 %	0,00077 %	0,00215 %	0,00001% %	0,00145 %	0,00023 %	0,00005 %	0,00215 %	0,00002 %	0,00058 %	0,00051 %
TUS10Y	0,00207 %	0,00135 %	0,00177 %	0,00150 %	0,00403 %	0,00097 %	0,02853 %	0,00265 %	0,00190 %	0,00429% %	0,00185 %	0,00106 %	0,00091 %	0,00252 %	0,00076 %	0,00598 %	0,00020 %
ISH	0,00369 %	0,00205 %	0,00270 %	0,00229 %	0,00506 %	0,00077 %	0,00265 %	0,00992 %	0,00211 %	0,00186% %	0,00285 %	0,00211 %	0,00010 %	0,00686 %	0,00190 %	0,00624 %	0,00027 %
CLH	0,00275 %	0,00385 %	0,00348 %	0,00284 %	0,00325 %	0,00215 %	0,00190 %	0,00211 %	0,02490 %	0,00037% %	0,00338 %	0,00123 %	0,00002 %	0,00468 %	0,00121 %	0,00203 %	0,00017 %
MEXT10 Y	0,00073 %	0,00049 %	0,00032 %	0,00031 %	0,00086 %	0,00001 %	0,00429 %	0,00186 %	0,00037 %	0,00917% %	0,00033 %	0,00228 %	0,00024 %	0,00190 %	0,00191 %	0,00115 %	0,00025 %
AVI	0,00286 %	0,00233 %	0,00325 %	0,00287 %	0,00324 %	0,00145 %	0,00185 %	0,00285 %	0,00338 %	0,00033% %	0,03108 %	0,00043 %	0,00004 %	0,00434 %	0,00086 %	0,00467 %	0,00049 %
COLT10 Y	0,00053 %	0,00075 %	0,00055 %	0,00102 %	0,00227 %	0,00023 %	0,00106 %	0,00211 %	0,00123 %	0,00228% %	0,00043 %	0,00825 %	0,00014 %	0,00307 %	0,00485 %	0,00160 %	0,00025 %
VSCH	0,00001 %	0,00002 %	0,00001 %	0,00001 %	0,00003 %	0,00005 %	0,00091 %	0,00010 %	0,00002 %	0,00024% %	0,00004 %	0,00014 %	0,00008 %	0,00008 %	0,00013 %	0,00009 %	0,00003 %
GXG	0,00545 %	0,00517 %	0,00520 %	0,00494 %	0,00973 %	0,00215 %	0,00252 %	0,00686 %	0,00468 %	0,00190% %	0,00434 %	0,00307 %	0,00008 %	0,01361 %	0,00263 %	0,00552 %	0,00001 %
COLT5 Y	0,00061 %	0,00098 %	0,00051 %	0,00040 %	0,00242 %	0,00002 %	0,00076 %	0,00190 %	0,00121 %	0,00191% %	0,00086 %	0,00485 %	0,00013 %	0,00263 %	0,01353 %	0,00138 %	0,00007 %
BBV	0,00408 %	0,00213 %	0,00222 %	0,00220 %	0,00425 %	0,00058 %	0,00598 %	0,00624 %	0,00203 %	0,00115% %	0,00467 %	0,00160 %	0,00009 %	0,00552 %	0,00138 %	0,02185 %	0,00008 %
BCCDT	0,00124 %	0,00057 %	0,00031 %	0,00009 %	0,00000 %	0,00051 %	0,00020 %	0,00027 %	0,00017 %	0,00025% %	0,00049 %	0,00025 %	0,00003 %	0,00001 %	0,00007 %	0,00008 %	0,02824 %

Fuente: elaboración propia con ayuda de software Excel

7. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para la aplicación del modelo de Markowitz se construyó para cada fondo un total de diez portafolios para cada uno de los tres tipos de fondos tomando en cuentas los topes máximos de inversión de cada uno presentados anteriormente, por esto a partir de ahora se estudiará cada tipo de fondo independientemente:

7.1.1. Fondo Conservador

En la siguiente tabla se pueden observar los portafolios contruidos y además el porcentaje de fondo que se deberá invertir en cada activo para la construcción del fondo conservador:

Tabla 6 resultados de los portafolios para el fondo conservador

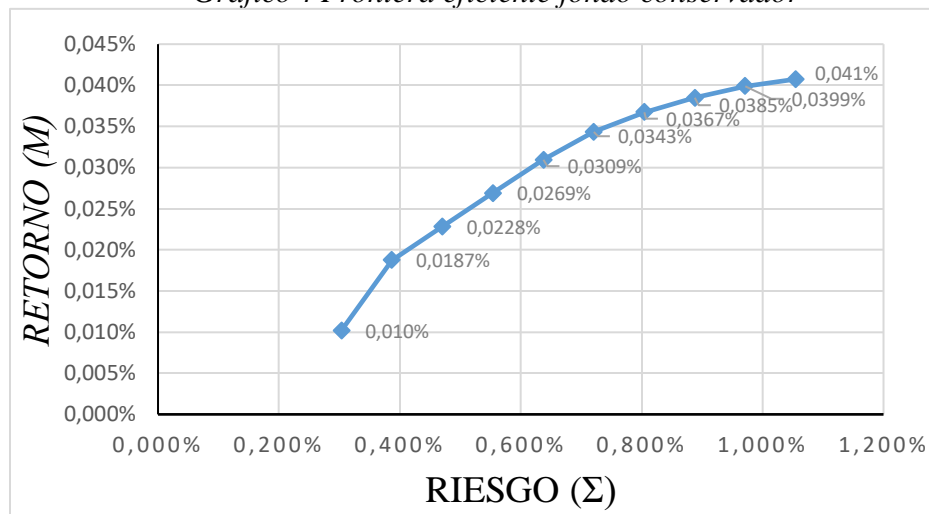
	Portafolio 1	Portafolio 2	Portafolio 3	Portafolio 4	Portafolio 5	Portafolio 6	Portafolio 7	Portafolio 8	Portafolio 9	Portafolio 10
BCOL	2,66%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
SIS	4,98%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
DAV	2,35%	1,39%	0,84%	0,83%	0,76%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ISA	3,74%	5,48%	6,07%	7,07%	8,13%	3,66%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ECO	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BBO	9,98%	0,11%	0,10%	0,10%	0,10%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
TUS10Y	0,00%	2,43%	3,67%	4,89%	6,07%	7,06%	7,67%	7,90%	9,11%	0,00%
ISH	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
CLH	2,01%	7,84%	9,78%	11,52%	13,28%	16,57%	19,43%	21,91%	29,41%	40,00%
MEXT10Y	10,85%	17,03%	20,62%	24,50%	28,40%	27,22%	21,15%	10,34%	0,00%	0,00%
AVI	2,07%	3,99%	4,81%	5,61%	6,46%	6,37%	5,27%	2,82%	1,47%	0,00%
COLT10Y	9,38%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%
VSCH	40,00%	40,00%	27,74%	14,24%	0,88%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
GXG	0,00%	13,28%	17,59%	20,88%	24,15%	35,58%	46,46%	57,01%	60,00%	60,00%
COLT5Y	4,63%	3,94%	3,77%	4,45%	4,97%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BBV	2,71%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BCCDT	4,64%	4,49%	4,99%	5,90%	6,78%	3,52%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fuente: Elaboracion Propia con ayuda software Solver de Excel.

Cada uno de los portafolios representa uno de los puntos de la curva en la frontera eficiente de Markowitz para el portafolio conservador, las cuales se componen de una combinacion eficiente entre los retornos obtenidos y el riesgo de portafolio, esto se puede analizar graficamente en la siguiente grafica:

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Gráfico 4 Frontera eficiente fondo conservador



Fuente: Elaboracion Propia con ayuda software Excel.

Se puede observar que la gráfica tiene un comportamiento cóncavo, además se comprueba la relación que existe entre los retornos y el riesgo, a partir de las combinaciones de estas dos componentes se procedió a evaluar cada portafolio utilizando el Ratio Sharpe (S) el cual mide la efectividad de las carteras recompensado el retorno esperado $E[R]$ contra el riesgo asumido (σ) de la siguiente forma:

$$S = \frac{E[R - R_F]}{\sigma}$$

Se debe aclarar que la ratio compara el riesgo del activo $E[R]$ con un activo de referencia libre de riesgo (R_F), este activo se usa para explicar el comportamiento del mercado de manera más sencilla dado que son activos con riesgo cero, usualmente se utilizan los títulos de deuda pública como activo de referencia, tomando en cuenta que las rentabilidades de los fondos pensionales se analizan en términos mensuales se tomó como activo de referencia el retorno de los Título de deuda públicas del Estado Colombiano (TESC1Y) a plazo de un año para facilitar la conversión de las rentabilidades en el plazo temporal y reducir el ruido generado por las mismas, a continuación se presenta una tabla con el riesgo

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

de cada portafolio, su retorno, su riesgo sistémico y el resultado del cálculo del índice de Sharpe:

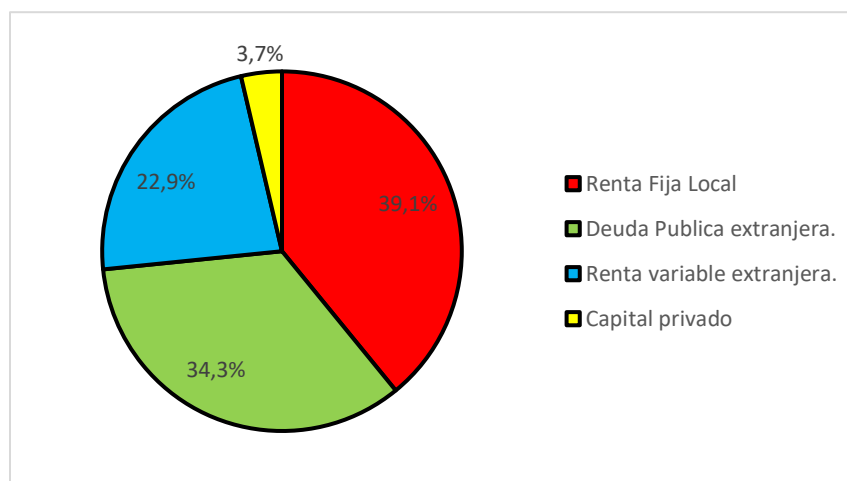
Tabla 7 Rendimientos de cartera del modelo Sharpe para el fondo conservador

Portafolio	Retorno (μ)	Riesgo (σ)	Sharpe(S)
1	0,0000992	0,0030345	1,15%
2	0,0001873	0,0038695	3,18%
3	0,0002283	0,0047044	3,49%
4	0,0002690	0,0055393	3,69%
5	0,0003095	0,0063742	3,85%
6	0,0003433	0,0072092	3,87%
7	0,0003672	0,0080441	3,76%
8	0,0003849	0,0088790	3,61%
9	0,0003988	0,0097139	3,44%
10	0,0004075	0,0105489	3,25%

Fuente: elaboración propia con ayuda de software Excel.

Si tomamos estos activos y la clasificación de estos tendríamos un portafolio construido en un 39.1% en renta fija local, y un 34,3% en deuda pública extranjera, lo que nos permite evidenciar claramente la aversión al riesgo de los usuarios del sistema, sin embargo, alrededor de una cuarta parte del portafolio se invierte en renta variable extranjera la cual ofrece una mayor rentabilidad para el portafolio.

Gráfico 5 distribución de portafolio por tipo de activo (fondo conservador)



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

7.1.2. Fondo Moderado

En la siguiente tabla se pueden observar los diez portafolios construidos para el fondo conservador y además el porcentaje que debe ser invertido en cada activo para obtener la combinación adecuada de riesgo y retorno, la cual varía en cada uno de los portafolios como se puede observar en la siguiente gráfica:

Tabla 8 resultados de los portafolios para el fondo moderado

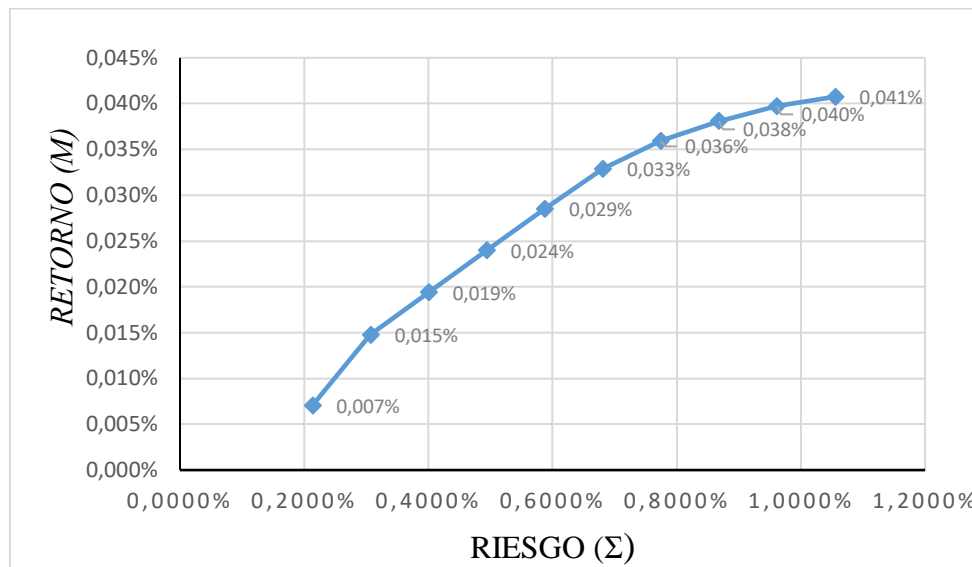
	Portafolio 1	Portafolio 2	Portafolio 3	Portafolio 4	Portafolio 5	Portafolio 6	Portafolio 7	Portafolio 8	Portafolio 9	Portafolio 10
BCOL	2,64%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
SIS	2,81%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
DAV	2,27%	0,01%	0,34%	0,09%	0,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ISA	2,31%	4,75%	5,25%	6,23%	7,38%	6,25%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ECO	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BBO	7,46%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
TUS10Y	0,00%	1,31%	2,85%	4,24%	5,62%	6,84%	7,47%	9,38%	9,08%	0,00%
ISH	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
CLH	1,21%	6,48%	8,12%	10,21%	11,86%	14,94%	19,43%	21,73%	28,19%	60,00%
MEXT10Y	6,42%	11,74%	16,45%	20,56%	25,56%	27,30%	25,06%	11,41%	0,91%	0,00%
AVI	1,26%	3,94%	3,79%	5,07%	5,94%	6,46%	6,60%	3,73%	1,82%	0,00%
COLT10Y	5,97%	0,76%	0,46%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
VSCH	60,00%	55,02%	39,41%	25,01%	9,56%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
GXG	0,00%	11,13%	15,66%	19,61%	23,08%	30,46%	41,04%	53,76%	60,00%	40,00%
COLT5Y	3,01%	1,96%	2,95%	3,72%	4,68%	2,17%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BBV	1,60%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BCCDT	3,02%	2,91%	4,71%	5,24%	6,20%	5,58%	0,40%	0,00%	0,00%	0,00%

Fuente: Elaboración Propia con ayuda software Solver de Excel.

Se procede a desarrollar los mismos pasos para el fondo moderado, cada uno de los portafolios representa uno de los puntos de la curva en la frontera eficiente de Markowitz para el portafolio moderado, las cuales se componen de una combinación eficiente entre los retornos obtenidos y el riesgo de portafolio, estos diez puntos se usaron para la construcción de la siguiente gráfica donde se encuentra la curva de la frontera eficiente para el fondo moderado:

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Gráfico 6 frontera eficiente fondo moderado



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

A partir de esto se evalúa el coeficiente de Sharpe igual que en el portafolio anterior y se seleccionó la mejor cartera:

Tabla 9 rendimientos de cartera del modelo Sharpe para el fondo moderado

Portafolio	Retorno (μ)	Riesgo (σ)	Sharpe(S)
1	0,0000706	0,0021324	0,29%
2	0,0001475	0,0030675	2,71%
3	0,0001939	0,0040027	3,24%
4	0,0002397	0,0049379	3,55%
5	0,0002852	0,0058730	3,76%
6	0,0003287	0,0068082	3,88%
7	0,0003593	0,0077434	3,81%
8	0,0003809	0,0086785	3,65%
9	0,0003974	0,0096137	3,46%
10	0,0004075	0,0105489	3,25%

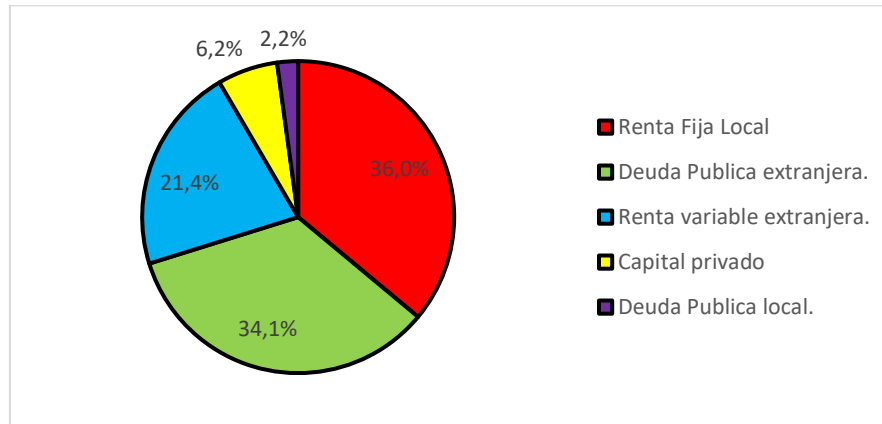
Fuente: elaboración propia con ayuda de software Excel.

Tomando lo anterior en cuenta se puede observar que el portafolio está distribuido en un 70% en activos de renta fija y un 30% en renta variable aproximadamente y tiene un comportamiento similar para el balance activos locales que ponderan un 50% del portafolio contra el 50% en activos extranjeros, es una posición claramente balanceada entre riesgo y

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

retorno las cuales tienen entre si una tasa de sustitución de uno a uno aproximadamente, esto es un comportamiento esperado para el usuario del portafolio moderado, este comportamiento es fácilmente observable en la siguiente gráfica.

Gráfico 7 distribución de portafolio por tipo de activo (Fondo moderado)



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

7.1.3. Fondo agresivo

En la siguiente tabla se pueden observar los portafolios construidos y además el porcentaje de fondo que se deberá invertir en cada activo para la construcción del fondo agresivo:

Tabla 10 resultados de los portafolios para el fondo agresivo

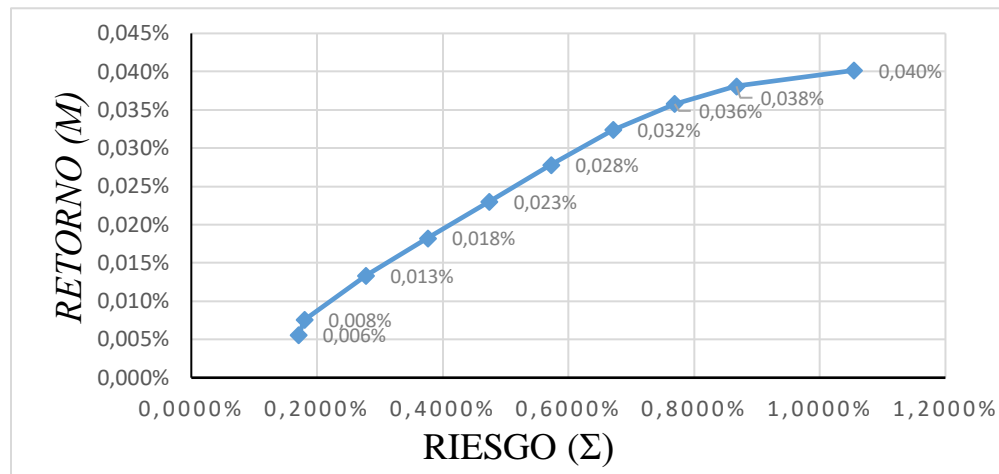
	Portafolio 1	Portafolio 2	Portafolio 3	Portafolio 4	Portafolio 5	Portafolio 6	Portafolio 7	Portafolio 8	Portafolio 9	Portafolio 10
BCOL	2,09%	0,80%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
SIS	2,19%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
DAV	1,79%	2,16%	0,55%	0,57%	0,58%	0,58%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
ISA	1,79%	2,94%	3,69%	4,93%	6,17%	7,44%	7,70%	1,17%	0,00%	0,00%
ECO	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BBO	5,64%	3,73%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
TUS10Y	0,00%	0,00%	0,82%	2,28%	3,73%	5,08%	5,64%	7,00%	7,85%	0,00%
ISH	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
CLH	0,94%	2,52%	5,77%	7,83%	9,89%	11,99%	14,96%	18,50%	21,39%	70,00%
MEXT10Y	4,41%	6,42%	11,64%	16,22%	20,83%	24,92%	24,36%	23,00%	12,78%	0,00%
AVI	0,96%	1,62%	2,81%	3,81%	4,83%	5,84%	6,89%	6,37%	3,36%	0,00%
COLT10Y	4,44%	2,92%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
VSCH	70,00%	70,00%	59,54%	43,30%	27,32%	11,44%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
GXG	0,00%	1,87%	10,25%	14,10%	17,89%	21,85%	29,72%	42,20%	54,62%	30,00%
COLT5Y	2,25%	2,35%	1,99%	2,95%	3,72%	4,71%	4,17%	0,00%	0,00%	0,00%
BBV	1,18%	0,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
BCCDT	2,32%	2,43%	2,94%	4,00%	5,06%	6,14%	6,55%	1,76%	0,00%	0,00%

Fuente: Elaboración Propia con ayuda software Solver de Excel.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Se procede a desarrollar los mismos pasos para el fondo agresivo o de mayor riesgo, cada uno de los portafolios representa uno de los puntos de la curva en la frontera eficiente de Markowitz para el portafolio moderado, las cuales se componen de una combinación eficiente entre los retornos obtenidos y el riesgo de portafolio, esto se puede analizar en la siguiente grafica:

Gráfico 8 frontera eficiente fondo agresivo



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

A partir de esto se evalúa el coeficiente de Sharpe igual que en el portafolio anterior y se seleccionó la mejor cartera:

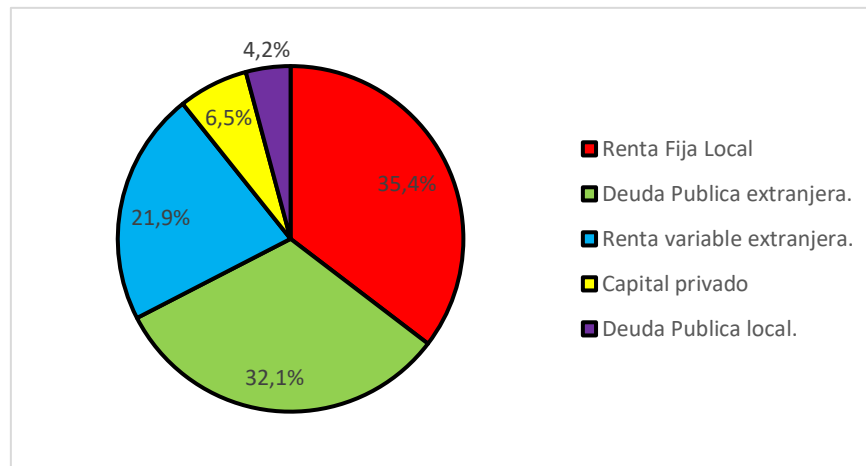
Tabla 11 rendimientos de cartera del modelo Sharpe para el fondo agresivo

Portafolio	Retorno (μ)	Riesgo (σ)	Sharpe(S)
1	0,0000556	0,0017094	-0,51%
2	0,0000755	0,0017995	0,62%
3	0,0001338	0,0027817	2,50%
4	0,0001823	0,0037639	3,13%
5	0,0002304	0,0047460	3,50%
6	0,0002782	0,0057282	3,73%
7	0,0003239	0,0067104	3,87%
8	0,0003578	0,0076925	3,81%
9	0,0003809	0,0086747	3,65%
10	0,0004017	0,0105489	3,20%

Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Gráfico 9 distribución de portafolio por tipo de activo (fondo agresivo)

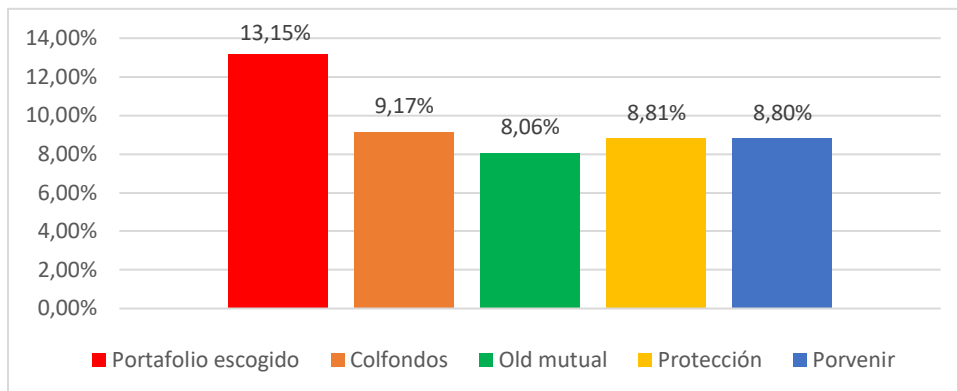


Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

Observando esta composición de activos es claro notar que el usuario trata de maximizar su consumo en activos de tipo extranjero que representan alrededor de un 50% del portafolio, esto se debe a que estos suelen brindar mejores opciones al inversor, sin embargo, la ley restringe que los portafolios tengan más de un 60% de inversión en el extranjero, esto con el propósito de promover el flujo de capitales locales, así que esta medida significa un límite para el correcto funcionamiento del portafolio, al menos una tercera parte del portafolio esta invertida en activos de alto riesgo y alta rentabilidad, los cuales tienen un valor importante para este portafolio en específico, sin embargo, la pérdida de eficiencia del mismo por cuenta de las restricción legal, lo convierte en un portafolio bastante seguro pero también menos rentable a pesar de ser el portafolio de mayor riesgo.

7.2.Comparación de Carteras con las AFP

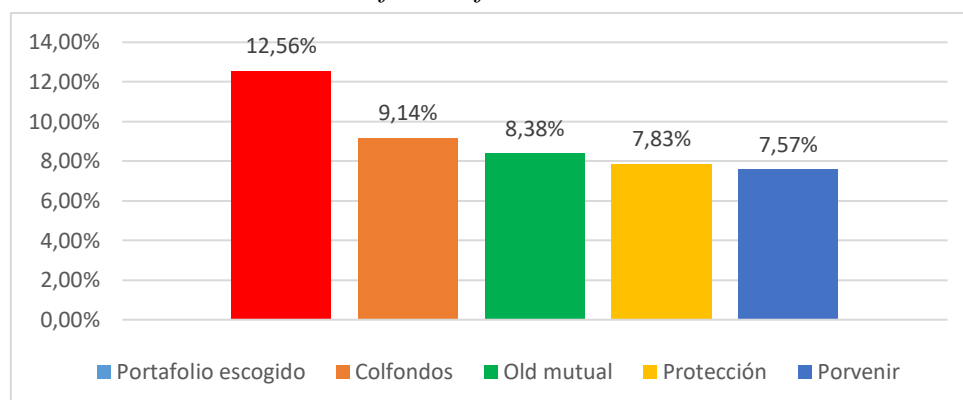
Gráfico 10 fondo conservador



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

De acuerdo al criterio de selección utilizado que fue el Ratio de Sharpe, el cual se elige para el fondo conservador es el portafolio seis, se obtiene la rentabilidad del portafolio con respecto a la retorno diario $(0,00034)^{11}$ y el riesgo acumulado en el tiempo, esto quiere decir que la rentabilidad será del 13,15% y a diferencia de las AFP que existen en el régimen de ahorro individual con solidaridad, el portafolio seleccionado cumple con las características que los usuarios prefieren obtener en cuanto a rentabilidad y riesgo, ya que está compuesto por al menos un 50% de inversión en renta fija con riesgo cero.

Gráfico 11 fondo moderado



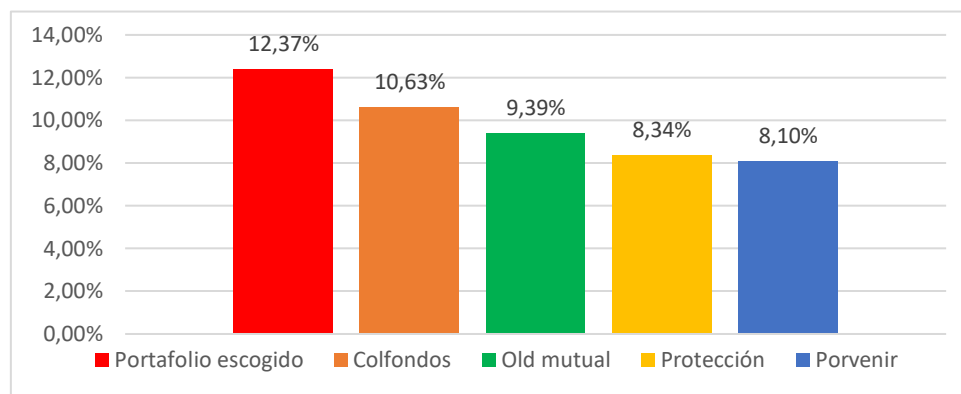
Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

¹¹ La información del retorno del fondo conservador la encuentra en la página 40 del presente documento

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

De acuerdo al criterio de selección utilizado que fue el Ratio de Sharpe, el cual se elige para el fondo moderado es el portafolio seis, se obtiene la rentabilidad del portafolio con respecto al retorno con respecto al retorno diario $(0,00032)^{12}$ y el riesgo sistémico del portafolio, se calcula que la rentabilidad será del 12,56%, siendo un portafolio balanceado entre activos de bajo riesgo y de alto, y un balance entre activos nacionales e internacionales, se construye como un portafolio intermedio para quien tenga una tasa de sustitución entre riesgo y retorno con valores cercanos a uno.

Gráfico 12 fondo agresivo



Fuente: Gráficos de elaboración propia con ayuda de software Excel.

De acuerdo al criterio de selección utilizado que fue el Ratio de Sharpe, el cual se elige para el fondo agresivo es el portafolio siete, se obtiene la rentabilidad del portafolio con respecto al riesgo y retorno diarios $(0,00032)^{13}$, se estima que la rentabilidad será del 12,37%, este portafolio como es lo esperado trata de maximizar la inversión en activos extranjeros y de renta variable para conseguir mejores resultados, debido a la preferencia de sus usuarios de maximizar ganancias aun a costa de riesgo, esto lo hace un portafolio idóneo para quien lleve poco tiempo cotizando dentro del sistema pensional.

¹² La información del retorno del fondo moderado la encuentra en la página 42 del presente documento

¹³ La información del retorno del fondo agresivo la encuentra en la página 44 del presente documento

8. Conclusiones

Se puede observar que los fondos pensionales mantienen unas tasas de rentabilidad relativamente similares para cada tipo de fondo y por esto el escoger entre una AFP y otra resulta prácticamente irrelevante para los usuarios de sistema pensional, sin embargo, el portafolio resultante para cada tipo de fondo resultado del desarrollo del trabajo muestra que es posible conseguir un mejor resultado de las inversiones, esto significa una falla en las AFP que se debe a dos razones principalmente, en primer lugar la limitaciones de la ley para las AFP y en segundo lugar la poca rentabilidad que obtienen las AFP mediante la correcta inversión de las carteras.

Tomando en cuenta que la diversificación es una medida para reducir el riesgo de un portafolio, es poco saludable que la ley impida el comportamiento adecuado de los portafolios para las AFP, estas limitaciones se presentan en dos sentidos, en primer lugar, las limitaciones que se dan para los activos que no cotizan en la BVC (Bolsa de valores de Colombia) presentan topes de inversión demasiado bajos, considerando el poco volumen de transacciones presentes en la bolsa nacional, en segundo lugar, los topes de los activos de mayor retorno es demasiado bajo en la medida en que este riesgo extra se puede contrarrestar con una mayor diversificación de los activos dentro de cada portafolio para mejorar la rentabilidad en un mediano y largo plazo.

A pesar de que una mejora del 3% como la obtenida por nuestro portafolio no parece ser tan relevante en el corto plazo y especialmente en los primeros años de cotización, se debe tener en cuenta que la tasa de crecimiento del interés sigue un comportamiento exponencial, y por tanto en el largo plazo esta mejora se traduce en que los usuarios del portafolio podrían obtener un incremento en su pensión final de entre un 25% y 30%

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

aproximadamente, lo cual es un valor a tomar en cuenta para los usuarios y especialmente para las AFP quienes podrían mejorar su rentabilidad por manejo de cartera de esta forma.

Se debe tener en cuenta además, que las AFP descomponen los pagos mensuales de los afiliados en dos partes, una parte que pasa al fondo del afiliado que es alrededor del 90% del aporte mensual y el 10% restante lo recoge la AFP bajo el concepto de costo administrativo, adicionalmente sobre la rentabilidad del fondo se cobra una comisión por manejo de aproximadamente 1%, quiere decir que si la rentabilidad de nuestro fondo es del 10% esta tasa de comisión sería de 0,01% sobre el valor del fondo, así es fácil ver que las AFP captan más dinero bajo el concepto de costo administrativo que por la comisión del manejo de las carteras al menos durante la mayor parte de los años de cotización del usuario, por tanto, las AFP tienen más incentivos para invertir en mejorar la captación de nuevos clientes que en mejorar y depurar los métodos de inversión de las carteras para mejorar la rentabilidad de estas para los usuarios, esto resulta en un modelo poco adaptable a las nuevas condiciones que puedan surgir en el mercado y que deja de ser eficiente después del corto plazo.

También se puede concluir que los promedios de cartera observados en la modelación inicial de Markowitz genera retornos más bajos que la modelación con los modelos GARCH, este podría deberse a que la varianza y la covarianza condicional capturan mejor la información de la volatilidad en comparación a la varianza no condicional obtenida mediante el método del cálculo de retornos, sin mencionar que además estos brindan una mayor robustez dado que consideran tanto los shocks aleatorios de la volatilidad de cada activo y su componente heterocedastico, lo que lo hace un modelo más confiable, es por esto que en series financieras los modelos GARCH y sus variaciones resultan idóneos para la modelación de la volatilidad.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

La corrección que los modelos GARCH aportan a Markowitz es verdaderamente útil considerando que el modelo original funcionaba con modelos lineales que en series como las financieras tienden a acumular ruido mediante la correlación existente entre los errores, es por esto que al utilizar varianza condicional las ponderaciones del portafolio seguramente se vean alteradas en relación a las que utilizan varianza no condicional, esto sumado a la medición de rendimiento de cartera que brinda la ratio de Sharpe convierten a Markowitz en un modelo bastante completo que considera la volatilidad que depende de sus propios cambios en el tiempo, y aprovecha la información de los activos libres de riesgo y permite contrastar su desempeño en el mercado local en función de su riesgo sistémico.

9. Recomendaciones

Para la realización de trabajos similares en el futuro recomendamos tener muy presente que para trabajar con los datos de la BVC (Bolsa de valores colombiana), debe tener claro que esta cierra los fines de semana, razón por la cual no existen valores de cierre de ningún activo que cotice en esta para los días sábado y domingo y algunos festivos importantes, esto representa un problema en el manejo de datos para el desarrollo de cualquier modelo.

Esto se puede corregir fácilmente con una normalización de datos para lo cual existen varios métodos, sin embargo utilizar el valor de cierre del día anterior para los días donde falte el dato a pesar de ser un proceso parsimonioso y molesto mantiene la linealidad de las series y evita generar ruido a diferencia de otros métodos de normalización que pueden resultar más ágiles, sin embargo si se recoge el valor de todos los activos este proceso se puede realizar para todos los activos en simultaneo, lo cual lo facilitaría.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

Adicionalmente para quien desee usar un modelo de selección de cartera de Markowitz recomendamos automatizar el proceso en Excel como medida de prevención ante cualquier inconveniente que pueda surgir, aprovechando la facilidad de uso del software y la eficacia de la extensión Solver para optimizar por si solo la función.

Es claro que los límites impuestos por la ley colombiana dificultan una diversificación mayor de los portafolios, se entiende bajo el contexto de la ley que esta surgió para impulsar el flujo de acciones en la bolsa nacional, pero esta falta de diversificación se traduce en tasas de riesgo más altas para los mismos niveles de retorno, tal vez la ley debería ser más flexible al respecto e incluso reconsiderar algunos de los toques que impone a ciertos tipos de activos ya que estos toques también limitan la eficacia de los portafolios escogidos.

Fuentes Bibliográficas

Akerlof, G. A. (1987). *El mercado de "limones": incertidumbre en la calidad y el mecanismo de mercado*. Recuperado el 6 de 4 de 2019, de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=44610>

Aldunate, R. (2011). *Análisis Económico del Derecho de la Dispersión de Riesgo en los Fondos de Pensiones Gestionados por las Administradoras de Fondos*. Obtenido de http://buengobierno.usal.es/revista/docs/17_Aldunate_ChilePensiones.pdf

Asofondos. (2019). *Multifondos*. Obtenido de <https://www.asofondos.org.co/multifondos>

Bernoulli, D. (1738). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica* vol 22, pp23-36.

Berstein, S., & Cabrita, C. (2007). *Los determinantes de la elección de AFP en Chile: nueva evidencia a partir de datos individuales*. Chile.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- Betancourt Bejarano, Katherine, García Díaz , C., & Lozano Riaño, V. (2013). Teoría de Markowitz con metodología EWMA para la toma de decisión sobre cómo invertir su dinero. *I*, 21.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327. Recuperado el 6 de 4 de 2019
- Botero, S., & Cano, J. A. (2008). Análisis de series de tiempo para la predicción de los precios de la energía en la bolsa de Colombia. *Cuadernos de Economía*.
- Box, G., & Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day.
- Chichon B, E. (2013). *10 años de multifondos desempeño de las administradoras de fondos de pensiones en Chile*. Chile.
- Colfondos Pensiones y Cesantías. (2018). *Regímenes pensionales en Colombia*. Obtenido de <https://www.colfondos.com.co/dxp/personas/pensiones-obligatorias/regimenes-pensionales-colombia>
- Constitución política de Colombia. (1991). *Artículo 48*. Obtenido de <http://www.constitucioncolombia.com/titulo-2/capitulo-2/articulo-48>
- consultorio contable, Universidad EAFIT. (2010). reforma pensional . Colombia , Colombia.
- Dubova, I. (2005). La validación y la aplicabilidad de la teoría de portafolio en el caso colombiano. *Cuadernos de Administración*, 18(30), 40.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *The Econometric Society* , 2, 987-1007 . doi:10.2307/1912773

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- Gálvez, P., Salgado, M., & Guitiérrez, M. (2010). *Optimización de carteras de inversión modelo de Markowitz y estimación de volatilidad con GARCH*. Horizontes Empresariales.
- García, M., & Moreno, A. (2011). *Optimización de portafolios de pensiones en Colombia: el esquema de multifondos*. Medellín.
- Henao Zapata, D. (2017). Optimización de portafolio: una aproximación mediante programación lineal y análisis jerárquico de procesos. *Revista institución universitaria de Antioquia*.
- Hernandez García, C. A. (2010). Efectos del Sistema multifondos en el regimen de Ahorro Individual en Colombia. *Revista de Economía del Rosario*, 179-211.
- Jaramillo, I. (1994). *El futuro de la salud en Colombia: Ley 100 política social, mercado y descentralización*. Santafé de Bogotá: FESCOL pags, 184-185.
- Laserna, J. (2007). Una propuesta para mejorar el manejo de riesgo, la diversificación y la eficiencia de los portafolios de los fondos de pensiones obligatorios. *La construcción de una política pública*, 413-439.
- Ley 100 de 1993, artículo 10. (29 de mayo de 2019). Diario oficial No. 41.148 de 23 de diciembre de 1993. Colombia, Colombia.
- Márkov, A. A. (1907). *Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain* (Vol. 1). Howard. .
- Markowitz, H. (Octubre de 1952). The Utility of Wealth. (C. Foundation, Ed.) *The Journal of Political Economy*, 151-158. . doi:10.1086/257177
- Marshack, J. (Octubre de 1933). Annual Survey of Statistical Information: The Branches of National Spending. *The Econometric Society*, 1(4), 373-386. doi:10.2307/1907329

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- Perez Ramirez, O. F., & Fernandez Castaño, H. (2006). Analisis de la volatilidad del indice general de la bolsa de valores de Colombia utilizando modelos ARCH. *Revista ingenierias Universidad de Medellin*.
- Reveiz, A., & Leon, C. (2008). Administracion de fondos de pensiones y multifondos en Colombia. (B. d. Colombia, Ed.) *Borradores de Economia*, 1(506), 28.
- Reveiz, A., Castro, R., Leon, R., & Piraquive, G. (2009). *Modelo de simulacion del valor de la pension de un trabajador en Colombia*. Bogotá.
- Reveiz, A., Leon, C., Laserna, J. M., & Martinez, I. (2008). Recomendaciones para la modificacion del regimen de pensiones obligatorias en Colombia. *La construccion de una politica publica*, 503-534.
- Reyes Zarate, F. (2012). *Modelos M-VARCH aplicados a portafolios de indices financieros de los mercados de TLCAN (2000-2007)*. Ciudad Universitaria, Mexico, Distrito Federal: Universidad Nacional Autonoma de Mexico.
- Rocha Buelvas , A. (2012). *ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA SEGURIDAD SOCIAL EN SALUD: PARTE DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN PAÍS SIN MEMORIA*.
- Rubio, F. (1987). *CAPM y APT una Nota Técnica*. Obtenido de <http://128.118.178.162/eps/fin/papers/0402/0402007.pdf>
- Senado de la república. (1993). *Ley 100 de 1993. Sistema de seguridad social integral*. Obtenido de http://www.secretariassenado.gov.co/senado/basedoc/ley_0100_1993.html
- Spence, M. (01 de Agosto de 1973). Job Market Signaling. *The Quarterly Journal of Economics*, 87, 355–374, . doi:10.2307/1882010.

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- Stiglitz, J. E. (1977). La distribución de la renta y la riqueza entre los individuos. *Hacienda Publica Espanola*(45), 145-156. Recuperado el 6 de 4 de 2019, de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4468085>
- Von Neumann, J., & Morgerstern, O. (1944). *Theory games and Economic Behaviour*. Princeton University Press. doi:1629708
- Zanabria, G. (2007). *Modelos de Atribución de Desempeño y su Aplicación al Manejo de Portafolios*. Obtenido de <http://www.bcrp.gob.pe:> <http://www.bcrp.gob.pe/docs/Publicaciones/Revista-Moneda/Moneda-136/Revista-Moneda-136-08.pdf>

Anexos

Anexo 1. Do File

1. clear all
2. use Base.dta
3. tsset Fecha ,daily
4. ssc install outreg2
5. **Estadística
Descriptiva
6. tabstat BCOL SIS DAV
ISA ECO BBO
TUS10Y ISH CLH
MEXT10Y BBV AVI
COLT10Y VSCH GXG
COLT5Y BCCDT,
statistics (n min max
mean sd variance
kurtosis skewness)
7. ****Generar retornos
8. **Bancolombia
9. gen lBCOL=ln(BCOL)
10. gen rBCOL=d.lBCOL
11. replace rBCOL=0 if
rBCOL==.
12. tsline rBCOL
13. ****Grupo Sura (SIS)
14. gen lSIS=ln(SIS)
15. gen rSIS=d.lSIS
16. replace rSIS=0 if
rSIS==.
17. tsline rSIS
18. ****DAVIVIENDA
(DAV)
19. gen lDAV=ln(DAV)
20. gen rDAV=d.lDAV
21. replace rDAV=0 if
rDAV==.
22. tsline rDAV
23. ****INTERCONNECTI
ON ELETRONICS
(ISA)
24. gen lISA=ln(ISA)
25. gen rISA=d.lISA
26. replace rISA=0 if
rISA==.
27. tsline rISA
28. ****BECOPETROL(EC
O)
29. gen lECO=ln(ECO)
30. gen rECO=d.lECO
31. replace rECO=0 if
rECO==.
32. tsline rECO
33. ***BANCO DE
BOGOTA (BBO)
34. gen lBBO=ln(BBO)
35. gen rBBO=d.lBBO
36. replace rBBO=0 if
rBBO==.
37. tsline rBBO
38. ***BONO DEL
TESORO US 10
AÑOS(TUS10Y)
39. gen
lTUS10Y=ln(TUS10Y)
40. gen
rTUS10Y=d.lTUS10Y
41. replace rTUS10Y=0 if
rTUS10Y==.
42. tsline rTUS10Y
43. ***ISAHRES EEM
(ISH)
44. gen lISH=ln(ISH)
45. gen rISH=d.lISH
46. replace rISH=0 if
rISH==.
47. tsline rISH
48. ***CEMEX LATAM
(CLH)
49. gen lCLH=ln(CLH)
50. gen rCLH=d.lCLH
51. replace rCLH=0 if
rCLH==.
52. tsline rCLH
53. ***BONO DE TESCOO
MEXICO (MEX10Y)
54. gen
lMEXT10Y=ln(MEXT1
0Y)
55. gen
rMEXT10Y=d.lMEXT1
0Y
56. replace rMEXT10Y=0
if rMEXT10Y==.
57. tsline rMEXT10Y
58. ***FALABELLA
(BBV)
59. gen lBBV=ln(BBV)
60. gen rBBV=d.lBBV
61. replace rBBV=0 if
rBBV==.
62. tsline rBBV
63. ***AVIANCA
64. gen lAVI=ln(AVI)
65. gen rAVI=d.lAVI
66. replace rAVI=0 if
rAVI==.
67. tsline rAVI
68. ***BONO TESORO 10
AÑOS COLOMBIANO
(COLT10Y)
69. gen
lCOLT10Y=ln(COLT1
0Y)
70. gen
rCOLT10Y=d.lCOLT1
0Y
71. replace rCOLT10Y=0 if
rCOLT10Y==.
72. tsline rCOLT10Y
73. ***Vanguard Short
Team Corporate
(VSCH)
74. gen lVSCH=ln(VSCH)
75. gen rVSCH=d.lVSCH
76. replace rVSCH=0 if
rVSCH==.
77. tsline rVSCH
78. ***Global X MSCI
Colombia ETF (GXG)
79. gen lGXG=ln(GXG)
80. gen rGXG=d.lGXG
81. replace rGXG=0 if
rGXG==.
82. tsline rGXG
83. ***BONO TESORO 5
AÑOS COLOMBIANO
(COLT5Y)
84. gen
lCOLT5Y=ln(COLT5Y
)
85. gen
rCOLT5Y=d.lCOLT5Y

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

- | | | |
|--|--|--|
| <p>86. replace rCOLT5Y=0 if
rCOLT5Y==.</p> <p>87. tsline rCOLT5Y</p> <p>88. ***CDT Bancolombia 1
año (BCCDT)</p> <p>89. gen
lBCCDT=ln(BCCDT)</p> <p>90. gen
rBCCDT=d.BCCDT</p> <p>91. replace rBCCDT=0 if
BCCDT==.</p> <p>92. tsline rBCCDT</p> <p>93. ***Matriz de varianza y
convarianza</p> <p>94. *(Generar en R para
evitar ruido producido
por los retornos del
activo)</p> <p>95. *1.Bancolombia
modelo (BCOL)</p> <p>96. histogram rBCOL
,normal</p> <p>97. **Identifica orden
AR(p) MA (q) para la
media.</p> <p>98. ac rBCOL
,name(acrBCOL)</p> <p>99. pac rBCOL
,name(pacrBCOL)</p> <p>100.graph combine
acrBCOL pacrBCOL</p> <p>101.**ARCH</p> <p>102.arch rBCOL, arch(2/2)</p> <p>103.outreg2 using
ARCH_BCOL.XLS</p> <p>104.**GARCH</p> <p>105.arch rBCOL, arch(2)
garch(2)</p> <p>106.outreg2 using
GARCH_BCOL.xls</p> <p>107.estat ic</p> <p>108.**Varianza</p> <p>109.tsappend ,add(5)</p> <p>110.predict varia_garch1
,variance</p> <p>111.tsline varia_garch1</p> <p>112.**Estacionaridad BCOL</p> <p>113.**Generar series</p> <p>114.gen dBCOL=d.BCOL</p> <p>115.gen tcBCOL=d.lBCOL</p> <p>116.**GRAFICOS</p> <p>117.tsline BCOL</p> | <p>118.tsline dBCOL</p> <p>119.tsline tcBCOL</p> <p>120.***Correlograma</p> <p>121.corrgram BCOL</p> <p>122.corrgram dBCOL</p> <p>123.corrgram lBCOL</p> <p>124.corrgram tcBCOL</p> <p>125.display 2/sqrt(2191)</p> <p>126.display 2/sqrt(2190)</p> <p>127.**Test ADF</p> <p>128.df Fuller BCOL ,trend</p> <p>129.df Fuller dBCOL ,trend</p> <p>130.df Fuller lBCOL ,trend</p> <p>131.df Fuller tcBCOL</p> <p>132.***Ruido Blanco</p> <p>133.set seed 1</p> <p>134.gen
ruidob=rnormal(0,1)</p> <p>135.tsline ruidob</p> <p>136.corrgram ruidob</p> <p>137.df Fuller ruidob</p> <p>138.wntestb ruidob ,table</p> <p>139.**2.Grupo Sura (SIS)</p> <p>140.histogram rBCOL
,normal</p> <p>141.**Identifica orden
AR(p) MA (q) para la
media.</p> <p>142.ac rSIS ,name(acrSIS)</p> <p>143.pac rSIS
,name(pacrSIS)</p> <p>144.graph combine acrSIS
pacrSIS</p> <p>145.**ARCH</p> <p>146.arch rSIS, arch(2/2)</p> <p>147.outreg2 using
ARCH_SIS.XLS</p> <p>148.**GARCH</p> <p>149.arch rSIS, arch(2)
garch(2)</p> <p>150.outreg2 using
GARCH_SIS.xls</p> <p>151.estat ic</p> <p>152.**Varianza</p> <p>153.tsappend ,add(5)</p> <p>154.predict varia_garch2
,variance</p> <p>155.tsline varia_garch2</p> <p>156.**Estacionaridad</p> <p>157.**Generar series</p> <p>158.gen dSIS=d.SIS</p> <p>159.gen tcSIS=d.lSIS</p> | <p>160.**GRAFICOS</p> <p>161.tsline SIS</p> <p>162.tsline dSIS</p> <p>163.tsline tcSIS</p> <p>164.***Correlograma</p> <p>165.corrgram SIS</p> <p>166.corrgram dSIS</p> <p>167.corrgram lSIS</p> <p>168.corrgram tcSIS</p> <p>169.display 2/sqrt(2191)</p> <p>170.display 2/sqrt(2190)</p> <p>171.**Test ADF</p> <p>172.df Fuller SIS ,trend</p> <p>173.df Fuller dSIS ,trend</p> <p>174.df Fuller lSIS ,trend</p> <p>175.df Fuller tcSIS</p> <p>176.***Ruido Blanco</p> <p>177.set seed 2</p> <p>178.gen
ruidob2=rnormal(0,1)</p> <p>179.tsline ruidob2</p> <p>180.corrgram ruidob2</p> <p>181.df Fuller ruidob2</p> <p>182.wntestb ruidob2 ,table</p> <p>183.**3.Davienda (DAV)</p> <p>184.histogram rDAV
,normal</p> <p>185.**Identifica orden
AR(p) MA (q) para la
media.</p> <p>186.ac rDAV
,name(acrDAV)</p> <p>187.pac rDAV
,name(pacrDAV)</p> <p>188.graph combine acrDAV
pacrDAV</p> <p>189.**ARCH</p> <p>190.arch rDAV, arch(3/5)</p> <p>191.outreg2 using
ARCH_DAV.XLS</p> <p>192.**GARCH</p> <p>193.arch rDAV, arch(3)
garch(5)</p> <p>194.outreg2 using
GARCH_DAV.xls</p> <p>195.estat ic</p> <p>196.**Varianza</p> <p>197.tsappend ,add(5)</p> <p>198.predict varia_garch3
,variance</p> <p>199.tsline varia_garch3</p> <p>200.**Estacionaridad</p> |
|--|--|--|

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

201.**Generar series	243.tsline varia_garch4	285.tsappend ,add(5)
202.gen dDAV=d.DAV	244.**Estacionaridad	286.predict varia_garch5
203.gen tcDAV=d.IDAV	245.**Generar series	,variance
204.**GRAFICOS	246.gen dISA=d.ISA	287.tsline varia_garch5
205.tsline DAV	247.gen tcISA=d.IISA	288.**Estacionaridad
206.tsline dDAV	248.**GRAFICOS	289.**Generar series
207.tsline tcDAV	249.tsline ISA	290.gen dECO=d.ECO
208.***Correlograma	250.tsline dISA	291.gen tcECO=d.IECO
209.corrgram DAV	251.tsline tcISA	292.**GRAFICOS
210.corrgram dDAV	252.***Correlograma	293.tsline ECO
211.corrgram IDAV	253.corrgram ISA	294.tsline dECO
212.corrgram tcDAV	254.corrgram dISA	295.tsline tcECO
213.display 2/sqrt(2191)	255.corrgram IISA	296.***Correlograma
214.display 2/sqrt(2190)	256.corrgram tcISA	297.corrgram ECO
215.**Test ADF	257.display 2/sqrt(2191)	298.corrgram dECO
216.df Fuller DAV ,trend	258.display 2/sqrt(2190)	299.corrgram IECO
217.df Fuller dDAV ,trend	259.**Test ADF	300.corrgram tcECO
218.df Fuller IDAV ,trend	260.df Fuller ISA ,trend	301.display 2/sqrt(2191)
219.df Fuller tcDAV	261.df Fuller dISA ,trend	302.display 2/sqrt(2190)
220.***Ruido Blanco	262.df Fuller IISA ,trend	303.**Test ADF
221.set seed 3	263.df Fuller tcISA	304.df Fuller ECO ,trend
222.gen	264.***Ruido Blanco	305.df Fuller dECO ,trend
ruidob3=rnormal(0,1)	265.set seed 4	306.df Fuller IECO ,trend
223.tsline ruidob3	266.gen	307.df Fuller tcECO
224.corrgram ruidob3	ruidob4=rnormal(0,1)	308.***Ruido Blanco
225.df Fuller ruidob3	267.tsline ruidob4	309.set seed 5
226.wntestb ruidob3 ,table	268.corrgram ruidob4	310.gen
227.**4.Interconexion	269.df Fuller ruidob4	ruidob5=rnormal(0,1)
electric(ISA)	270.wntestb ruidob4 ,table	311.tsline ruidob5
228.histogram rISA ,normal	271.**5.Ecopetrol (ECO)	312.corrgram ruidob5
229.**Identifica orden	272.histogram rECO	313.df Fuller ruidob5
AR(p) MA (q) para la	,normal	314.wntestb ruidob5 ,table
media.	273.**Identifica orden	315.**6.Banco de Bogota
230.ac rISA ,name(acrISA)	AR(p) MA (q) para la	(BBO)
231.pac rISA	media.	316.histogram rBBO
,name(pacrISA)	274.ac rECO	,normal
232.graph combine acrISA	,name(acrECO)	317.**Identifica orden
pacrISA	275.pac rECO	AR(p) MA (q) para la
233.**ARCH	,name(pacrECO)	media.
234.arch rISA, arch(1/1)	276.graph combine acrECO	318.ac rBBO
235.outreg2 using	pacrECO	,name(acrBBO)
ARCH_ISA.XLS	277.**ARCH	319.pac rBBO
236.**GARCH	278.arch rECO, arch(3/3)	,name(pacrBBO)
237.arch rISA, arch(1)	279.outreg2 using	320.graph combine acrBBO
garch(1)	ARCH_ECO.XLS	pacrBBO
238.outreg2 using	280.**GARCH	321.**ARCH
GARCH_ISA.xls	281.arch rECO, arch(3)	322.arch rBBO, arch(1/1)
239.estat ic	garch(3)	323.outreg2 using
240.**Varianza	282.outreg2 using	ARCH_BBO.XLS
241.tsappend ,add(5)	GARCH_ECO.xls	324.**GARCH
242.predict varia_garch4	283.estat ic	325.arch rBBO, arch(1)
,variance	284.**Varianza	garch(1)

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

326.outreg2 using GARCH_BBO.xls	366.arch rTUS10Y, arch(1/1)	406.ac rISH ,name(acrISH)
327.estat ic	367.outreg2 using ARCH_TUS10Y.XLS	407.pac rISH ,name(pacrISH)
328.**Varianza	368.**GARCH	408.graph combine acrISA pacrISH
329.tsappend ,add(5)	369.arch rTUS10Y, arch(1) garch(1)	409.**ARCH
330.predict varia_garch6 ,variance	370.outreg2 using GARCH_TUS10Y.xls	410.arch rISH, arch(1/1)
331.tsline varia_garch6	371.estat ic	411.outreg2 using ARCH_ISH.XLS
332.**Estacionaridad	372.**Varianza	412.**GARCH
333.**Generar series	373.tsappend ,add(5)	413.arch rISH, arch(1) garch(1)
334.gen dBBO=d.BBO	374.predict varia_garch7 ,variance	414.outreg2 using GARCH_ISH.xls
335.gen tcBBO=d.IBBO	375.tsline varia_garch7	415.estat ic
336.**GRAFICOS	376.**Estacionaridad	416.**Varianza
337.tsline BBO	377.**Generar series	417.tsappend ,add(5)
338.tsline dBBO	378.gen dTUS10Y=d.TUS10Y	418.predict varia_garch8 ,variance
339.tsline tcBBO	379.gen tcTUS10Y=d.ITUS10Y	419.tsline varia_garch8
340.****Correlograma	380.**GRAFICOS	420.**Estacionaridad
341.corrgram BBO	381.tsline TUS10Y	421.**Generar series
342.corrgram dBBO	382.tsline dTUS10Y	422.gen dISH=d.ISH
343.corrgram IBBO	383.tsline tcTUS10Y	423.gen tcISH=d.IISH
344.corrgram tcBBO	384.****Correlograma	424.**GRAFICOS
345.display 2/sqrt(2191)	385.corrgram TUS10Y	425.tsline ISH
346.display 2/sqrt(2190)	386.corrgram dTUS10Y	426.tsline dISH
347.**Test ADF	387.corrgram ITUS10Y	427.tsline tcISH
348.df Fuller BBO ,trend	388.corrgram tcTUS10Y	428.****Correlograma
349.df Fuller dBBO ,trend	389.display 2/sqrt(2191)	429.corrgram ISH
350.df Fuller IBBO ,trend	390.display 2/sqrt(2190)	430.corrgram dISH
351.df Fuller tcBBO	391.**Test ADF	431.corrgram IISH
352.***Ruido Blanco	392.df Fuller TUS10Y ,trend	432.corrgram tcISH
353.set seed 6	393.df Fuller dTUS10Y ,trend	433.display 2/sqrt(2191)
354.gen ruidob6=rnormal(0,1)	394.df Fuller ITUS10Y ,trend	434.display 2/sqrt(2190)
355.tsline ruidob6	395.df Fuller tcTUS10Y	435.**Test ADF
356.corrgram ruidob6	396.***Ruido Blanco	436.df Fuller ISH ,trend
357.df Fuller ruidob6	397.set seed 7	437.df Fuller dISH ,trend
358.wntestb ruidob6 ,table	398.gen ruidob7=rnormal(0,1)	438.df Fuller IISH ,trend
359.**7.Bono del Tesoro nacional US 10 AÑOS(TUS10Y)	399.tsline ruidob7	439.df Fuller tcISH
360.histogram rTUS10Y ,normal	400.corrgram ruidob7	440.***Ruido Blanco
361.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.	401.df Fuller ruidob7	441.set seed 8
362.ac rTUS10Y ,name(acrTUS10Y)	402.wntestb ruidob7 ,table	442.gen ruidob8=rnormal(0,1)
363.pac rTUS10Y ,name(pacrTUS10Y)	403.**8.ISHARES MSCI EMERGING MARKETS (ISH)	443.tsline ruidob8
364.graph combine acrTUS10Y pacrTUS10Y	404.histogram rISH ,normal	444.corrgram ruidob8
365.**ARCH	405.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.	445.df Fuller ruidob8
		446.wntestb ruidob8 ,table
		447.**9.CEMEX LATAM HOLDINGS S.A (CLH)
		448.histogram rCLH ,normal

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

449.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.	491.**10. Bono tesoro de Mexico TES 10 AÑOS (MEXT10Y)	523.**Test ADF
450.ac rCLH ,name(acrCLH)	492.histogram rMEXT10Y ,normal	524.dfuller MEXT10Y ,trend
451.pac rCLH ,name(pacrCLH)	493.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.	525.dfuller dMEXT10Y ,trend
452.graph combine acrCLH pacrCLH	494.ac rMEXT10Y ,name(acrMEXT10Y)	526.dfuller lMEXT10Y ,trend
453.**ARCH	495.pac rMEXT10Y ,name(pacrMEXT10Y)	527.dfuller tcMEXT10Y
454.arch rCLH, arch(1/1)	496.graph combine acrMEXT10Y pacrMEXT10Y	528.**Ruido Blanco
455.outreg2 using ARCH_CLH.XLS	497.**ARCH	529.set seed 10
456.**GARCH	498.arch rMEXT10Y, arch(5/6)	530.gen ruidob10=rnormal(0,1)
457.arch rCLH, arch(1) garch(1)	499.outreg2 using ARCH_MEXT10Y.XL S	531.tsline ruidob10
458.outreg2 using GARCH_CLH.xls	500.**GARCH	532.corrgram ruidob10
459.estat ic	501.arch rMEXT10Y, arch(5) garch(6)	533.dfuller ruidob10
460.**Varianza	502.outreg2 using GARCH_MEXT10Y.xl s	534.wntestb ruidob10 ,table
461.tsappend ,add(5)	503.estat ic	535.**11. Banco Bilbao Vnaguard (BBV)
462.predict varia_garch9 ,variance	504.**Varianza	536.histogram rBBV ,normal
463.tsline varia_garch9	505.tsappend ,add(5)	537.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.
464.**Estacionaridad	506.predict varia_garch10 ,variance	538.ac rBBV ,name(acrBBV)
465.**Generar series	507.tsline varia_garch10	539.pac rBBV ,name(pacrBBV)
466.gen dCLH=d.CLH	508.**Estacionaridad	540.graph combine acrBBV pacrBBV
467.gen tcCLH=d.ICLH	509.**Generar series	541.**ARCH
468.**GRAFICOS	510.gen dMEXT10Y=d.MEXT1 0Y	542.arch rBBV, arch(1/1)
469.tsline CLH	511.gen tcMEXT10Y=d.lMEXT 10Y	543.outreg2 using ARCH_BBV.XLS
470.tsline dCLH	512.**GRAFICOS	544.**GARCH
471.tsline tcCLH	513.tsline MEXT10Y	545.arch rBBV, arch(1) garch(1)
472.****Correlograma	514.tsline dMEXT10Y	546.outreg2 using GARCH_BBV.xls
473.corrgram CLH	515.tsline tcMEXT10Y	547.estat ic
474.corrgram dCLH	516.****Correlograma	548.**Varianza
475.corrgram ICLH	517.corrgram MEXT10Y	549.tsappend ,add(5)
476.corrgram tcCLH	518.corrgram dMEXT10Y	550.predict varia_garch11 ,variance
477.display 2/sqrt(2191)	519.corrgram lMEXT10Y	551.tsline varia_garch11
478.display 2/sqrt(2190)	520.corrgram tcMEXT10Y	552.**Estacionaridad
479.**Test ADF	521.display 2/sqrt(2191)	553.**Generar series
480.dfuller CLH ,trend	522.display 2/sqrt(2190)	554.gen dBBV=d.BBV
481.dfuller dCLH ,trend		555.gen tcBBV=d.IBBV
482.dfuller ICLH ,trend		556.**GRAFICOS
483.dfuller tcCLH		557.tsline BBV
484.**Ruido Blanco		558.tsline dBBV
485.set seed 9		559.tsline tcBBV
486.gen ruidob9=rnormal(0,1)		
487.tsline ruidob9		
488.corrgram ruidob9		
489.dfuller ruidob9		
490.wntestb ruidob9 ,table		

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

560.****Correlograma	603.****Correlograma	640.**Generar series
561.corrgram BBV	604.corrgram AVI	641.gen
562.corrgram dBBV	605.corrgram dAVI	dCOLT10Y=d.COLT10
563.corrgram lBBV	606.corrgram lAVI	Y
564.display 2/sqrt(2191)	607.corrgram tcAVI	642.gen
565.display 2/sqrt(2190)	608.display 2/sqrt(2191)	tcCOLT10Y=d.lCOLT1
566.**Test ADF	609.display 2/sqrt(2190)	0Y
567.df Fuller BBV ,trend	610.**Test ADF	643.**GRAFICOS
568.df Fuller dBBV ,trend	611.df Fuller AVI ,trend	644.tsline COLT10Y
569.df Fuller lBBV ,trend	612.df Fuller dAVI ,trend	645.tsline dCOLT10Y
570.df Fuller tcBBV	613.df Fuller lAVI ,trend	646.tsline tcCOLT10Y
571.***Ruido Blanco	614.df Fuller tcAVI	647.****Correlograma
572.set seed 11	615.***Ruido Blanco	648.corrgram COLT10Y
573.gen	616.set seed 12	649.corrgram dCOLT10Y
ruidob11=rnormal(0,1)	617.gen	650.corrgram lCOLT10Y
574.tsline ruidob11	ruidob12=rnormal(0,1)	651.corrgram tcCOLT10Y
575.corrgram ruidob11	618.tsline ruidob12	652.display 2/sqrt(2191)
576.df Fuller ruidob11	619.corrgram ruidob12	653.display 2/sqrt(2190)
577.wntestb ruidob11 ,table	620.df Fuller ruidob12	654.**Test ADF
578.**12.Aviauca (AVI)	621.wntestb ruidob12 ,table	655.df Fuller COLT10Y ,trend
579.histogram rAVI ,normal	622.**13.Bono del tesoro	656.df Fuller dCOLT10Y
580.**Identifica orden	colombia tes 10 años	,trend
AR(p) MA (q) para la	(COLT10Y)	657.df Fuller lCOLT10Y
media.	623.histogram rCOLT10Y	,trend
581.ac rAVI ,name(acrAVI)	,normal	658.df Fuller tcCOLT10Y
582.pac rAVI	624.**Identifica orden	659.***Ruido Blanco
,name(pacrAVI)	AR(p) MA (q) para la	660.set seed 13
583.graph combine acrAVI	media.	661.gen
pacrAVI	625.ac rCOLT10Y	ruidob13=rnormal(0,1)
584.**ARCH	,name(acrCOLT10Y)	662.tsline ruidob13
585.arch rAVI, arch(4/5)	626.pac rCOLT10Y	663.corrgram ruidob13
586.outreg2 using	,name(pacrCOLT10Y)	664.df Fuller ruidob13
ARCH_AVI.XLS	627.graph combine	665.wntestb ruidob13 ,table
587.**GARCH	acrCOLT10Y	666.**14.VANGUARD
588.arch rAVI, arch(4)	pacrCOLT10Y	SHORT TERM
garch(5)	628.**ARCH	CORPORATE (VSCH)
589.outreg2 using	629.arch rCOLT10Y,	667.histogram rVSCH
GARCH_AVI.xls	arch(6/8)	,normal
590.estat ic	630.outreg2 using	668.**Identifica orden
591.**Varianza	ARCH_COLT10Y.XLS	AR(p) MA (q) para la
592.tsappend ,add(5)	631.**GARCH	media.
593.predict varia_garch12	632.arch rCOLT10Y,	669.ac rVSCH
,variance	arch(6) garch(8)	,name(acrVSCH)
594.tsline varia_garch12	633.outreg2 using	670.pac rVSCH
595.**Estacionaridad	GARCH_COLT10Y.xls	,name(pacrVSCH)
596.**Generar series	634.estat ic	671.graph combine
597.gen dAVI=d.AVI	635.**Varianza	acrVSCH pacrVSCH
598.gen tcAVI=d.lAVI	636.tsappend ,add(5)	672.**ARCH
599.**GRAFICOS	637.predict varia_garch13	673.arch rVSCH, arch(1/1)
600.tsline AVI	,variance	674.outreg2 using
601.tsline dAVI	638.tsline varia_garch13	ARCH_VSCH.XLS
602.tsline tcAVI	639.**Estacionaridad	675.**GARCH

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

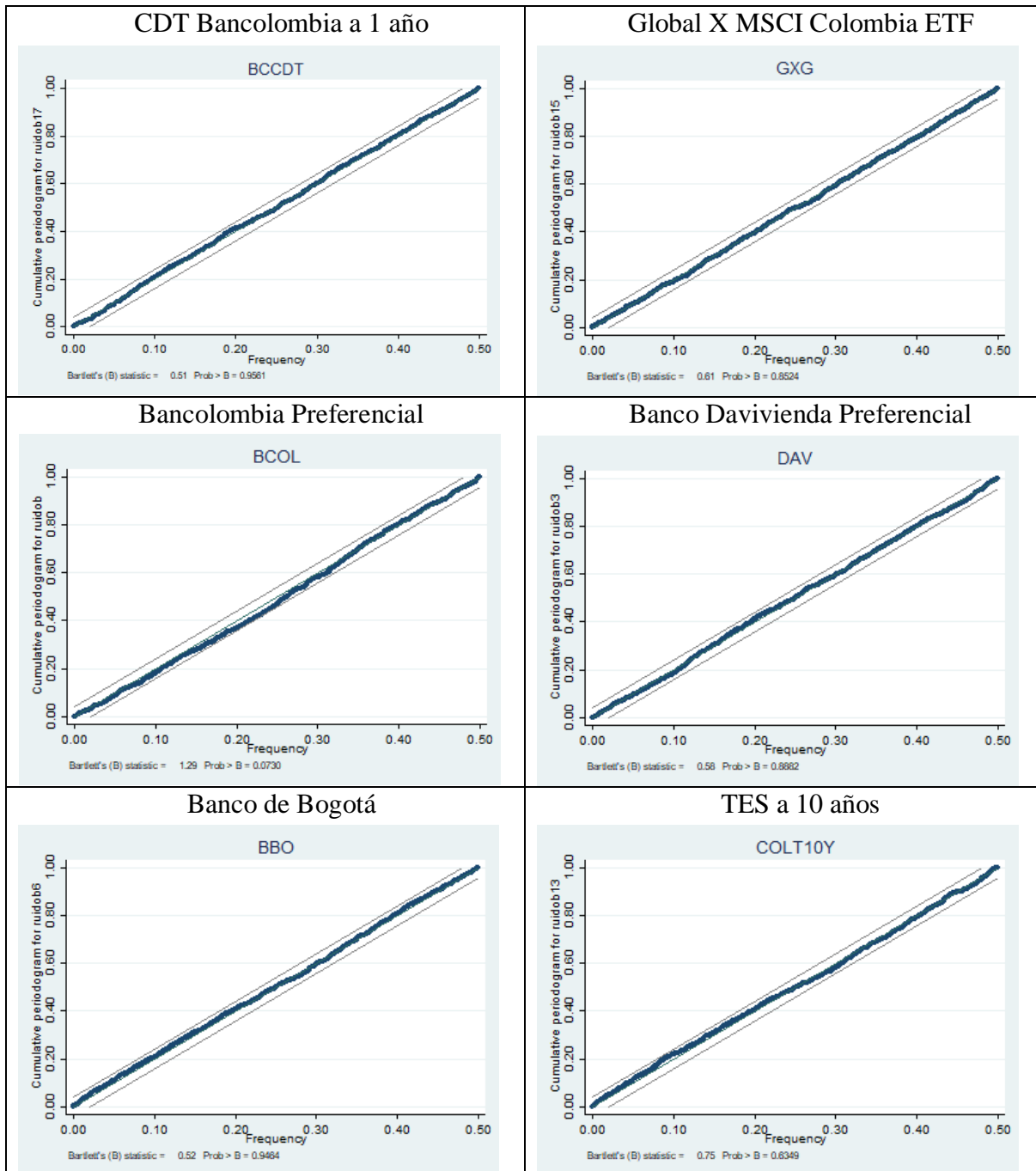
<p>676.arch rVSCH, arch(1) garch(1)</p> <p>677.outreg2 using GARCH_VSCH.xls</p> <p>678.estat ic</p> <p>679.**Varianza</p> <p>680.tsappend ,add(5)</p> <p>681.predict varia_garch14 ,variance</p> <p>682.tsline varia_garch14</p> <p>683.**Estacionaridad</p> <p>684.**Generar series</p> <p>685.gen dVSCH=d.VSCH</p> <p>686.gen tcVSCH=d.IVSCH</p> <p>687.**GRAFICOS</p> <p>688.tsline VSCH</p> <p>689.tsline dVSCH</p> <p>690.tsline tcVSCH</p> <p>691.***Correlograma</p> <p>692.corrgram VSCH</p> <p>693.corrgram dVSCH</p> <p>694.corrgram IVSCH</p> <p>695.corrgram tcVSCH</p> <p>696.display 2/sqrt(2191)</p> <p>697.display 2/sqrt(2190)</p> <p>698.**Test ADF</p> <p>699.dfuller VSCH ,trend</p> <p>700.dfuller dVSCH ,trend</p> <p>701.dfuller IVSCH ,trend</p> <p>702.dfuller tcVSCH</p> <p>703.***Ruido Blanco</p> <p>704.set seed 14</p> <p>705.gen ruidob14=rnormal(0,1)</p> <p>706.tsline ruidob14</p> <p>707.corrgram ruidob14</p> <p>708.dfuller ruidob14</p> <p>709.wntestb ruidob14 ,table</p> <p>710.**15.Global MSCI ETF Colombia (GXG)</p> <p>711.histogram rGXG ,normal</p> <p>712.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.</p> <p>713.ac rGXG ,name(acrGXG)</p> <p>714.pac rGXG ,name(pacrGXG)</p> <p>715.graph combine acrGXG pacrGXG</p> <p>716.**ARCH</p>	<p>717.arch rGXG, arch(2/2)</p> <p>718.outreg2 using ARCH_GXG.XLS</p> <p>719.**GARCH</p> <p>720.arch rGXG, arch(2) garch(2)</p> <p>721.outreg2 using GARCH_GXG.xls</p> <p>722.estat ic</p> <p>723.**Varianza</p> <p>724.tsappend ,add(5)</p> <p>725.predict varia_garch15 ,variance</p> <p>726.tsline varia_garch15</p> <p>727.**Estacionaridad</p> <p>728.**Generar series</p> <p>729.gen dGXG=d.GXG</p> <p>730.gen tcGXG=d.IGXG</p> <p>731.**GRAFICOS</p> <p>732.tsline GXG</p> <p>733.tsline dGXG</p> <p>734.tsline tcGXG</p> <p>735.***Correlograma</p> <p>736.corrgram GXG</p> <p>737.corrgram dGXG</p> <p>738.corrgram lGXG</p> <p>739.corrgram tcGXG</p> <p>740.display 2/sqrt(2191)</p> <p>741.display 2/sqrt(2190)</p> <p>742.**Test ADF</p> <p>743.dfuller GXG ,trend</p> <p>744.dfuller dGXG ,trend</p> <p>745.dfuller lGXG ,trend</p> <p>746.dfuller tcGXG</p> <p>747.***Ruido Blanco</p> <p>748.set seed 15</p> <p>749.gen ruidob15=rnormal(0,1)</p> <p>750.tsline ruidob15</p> <p>751.corrgram ruidob15</p> <p>752.dfuller ruidob15</p> <p>753.wntestb ruidob15 ,table</p> <p>754.**16.Titulo del tesoro de colombia TES 5 años (COLT5Y)</p> <p>755.histogram rCOLT5Y ,normal</p> <p>756.**Identifica orden AR(p) MA (q) para la media.</p> <p>757.ac rCOLT5Y ,name(acrCOLT5Y)</p>	<p>758.pac rCOLT5Y ,name(pacrCOLT5Y)</p> <p>759.graph combine acrCOLT5Y pacrCOLT5Y</p> <p>760.**ARCH</p> <p>761.arch rCOLT5Y, arch(2/2)</p> <p>762.outreg2 using ARCH_COLT5Y.XLS</p> <p>763.**GARCH</p> <p>764.arch rCOLT5Y, arch(2) garch(2)</p> <p>765.outreg2 using GARCH_COLT5Y.xls</p> <p>766.estat ic</p> <p>767.**Varianza</p> <p>768.tsappend ,add(5)</p> <p>769.predict varia_garch16 ,variance</p> <p>770.tsline varia_garch16</p> <p>771.**Estacionaridad</p> <p>772.**Generar series</p> <p>773.gen dCOLT5Y=d.COLT5Y</p> <p>774.gen tcCOLT5Y=d.ICOLT5 Y</p> <p>775.**GRAFICOS</p> <p>776.tsline COLT5Y</p> <p>777.tsline dCOLT5Y</p> <p>778.tsline tcCOLT5Y</p> <p>779.***Correlograma</p> <p>780.corrgram COLT5Y</p> <p>781.corrgram dCOLT5Y</p> <p>782.corrgram lCOLT5Y</p> <p>783.corrgram tcCOLT5Y</p> <p>784.display 2/sqrt(2191)</p> <p>785.display 2/sqrt(2190)</p> <p>786.**Test ADF</p> <p>787.dfuller COLT5Y ,trend</p> <p>788.dfuller dCOLT5Y ,trend</p> <p>789.dfuller lCOLT5Y ,trend</p> <p>790.dfuller tcCOLT5Y</p> <p>791.***Ruido Blanco</p> <p>792.set seed 16</p> <p>793.gen ruidob16=rnormal(0,1)</p> <p>794.tsline ruidob16</p> <p>795.corrgram ruidob16</p> <p>796.dfuller ruidob16</p> <p>797.wntestb ruidob16 ,table</p>
---	--	---

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

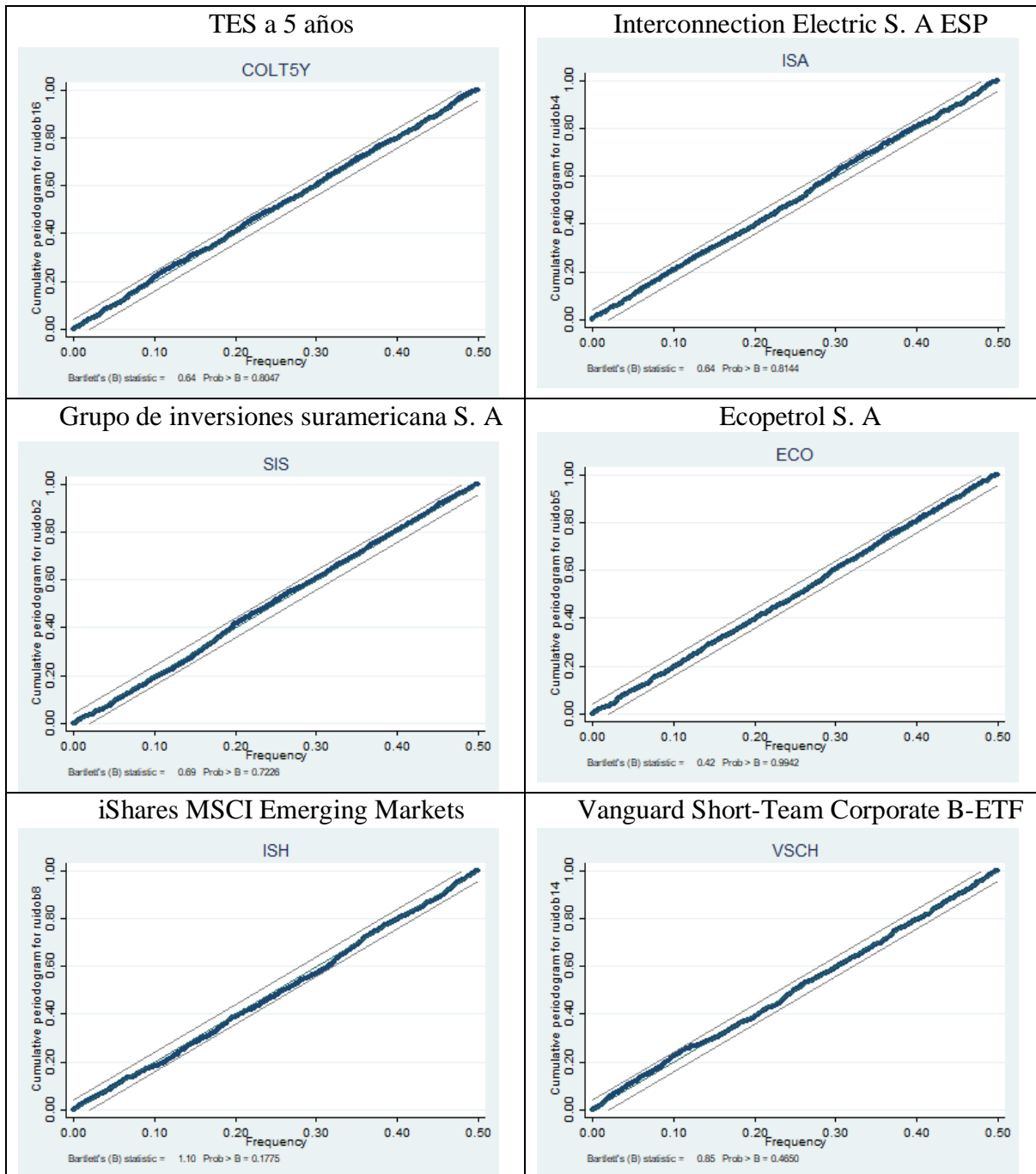
```
798.***17.CDT
    BANCOLOMBIA 1
    AÑO (BCCDT)
799.histogram rBCCDT
    ,normal
800.**Identifica orden
    AR(p) MA (q) para la
    media.
801.ac rBCCDT
    ,name(acrBCCDT)
802.pac rBCCDT
    ,name(pacrBCCDT)
803.graph combine
    acrBCCDT pacrBCCDT
804.**ARCH
805.arch rBCCDT, arch(2/2)
806.outreg2 using
    ARCH_BCCDT.XLS
807.**GARCH
808.arch rBCCDT, arch(2)
    garch(2)
809.outreg2 using
    GARCH_BCCDT.xls
810.estat ic
811.**Varianza
812.tsappend ,add(5)
813.predict varia_garch17
    ,variance
814.tsline varia_garch17
815.**Estacionaridad
816.**Generar series
817.gen
    dBCCDT=d.BCCDT
818.gen
    tcBCCDT=d.lBCCDT
819.**GRAFICOS
820.tsline BCCDT
821.tsline dBCCDT
822.tsline tcBCCDT
823.***Correlograma
824.corrgram BCCDT
825.corrgram dBCCDT
826.corrgram lBCCDT
827.corrgram tcBCCDT
828.display 2/sqrt(2191)
829.display 2/sqrt(2190)
830.**Test ADF
831.df Fuller BCCDT ,trend
832.df Fuller dBCCDT ,trend
833.df Fuller lBCCDT ,trend
834.df Fuller tcBCCDT
835.***Ruido Blanco
836.set seed 17
837.gen
    ruidob17=rnormal(0,1)
838.tsline ruidob17
839.corrgram ruidob17
840.df Fuller ruidob17
841.wntestb ruidob17 ,table
```

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES

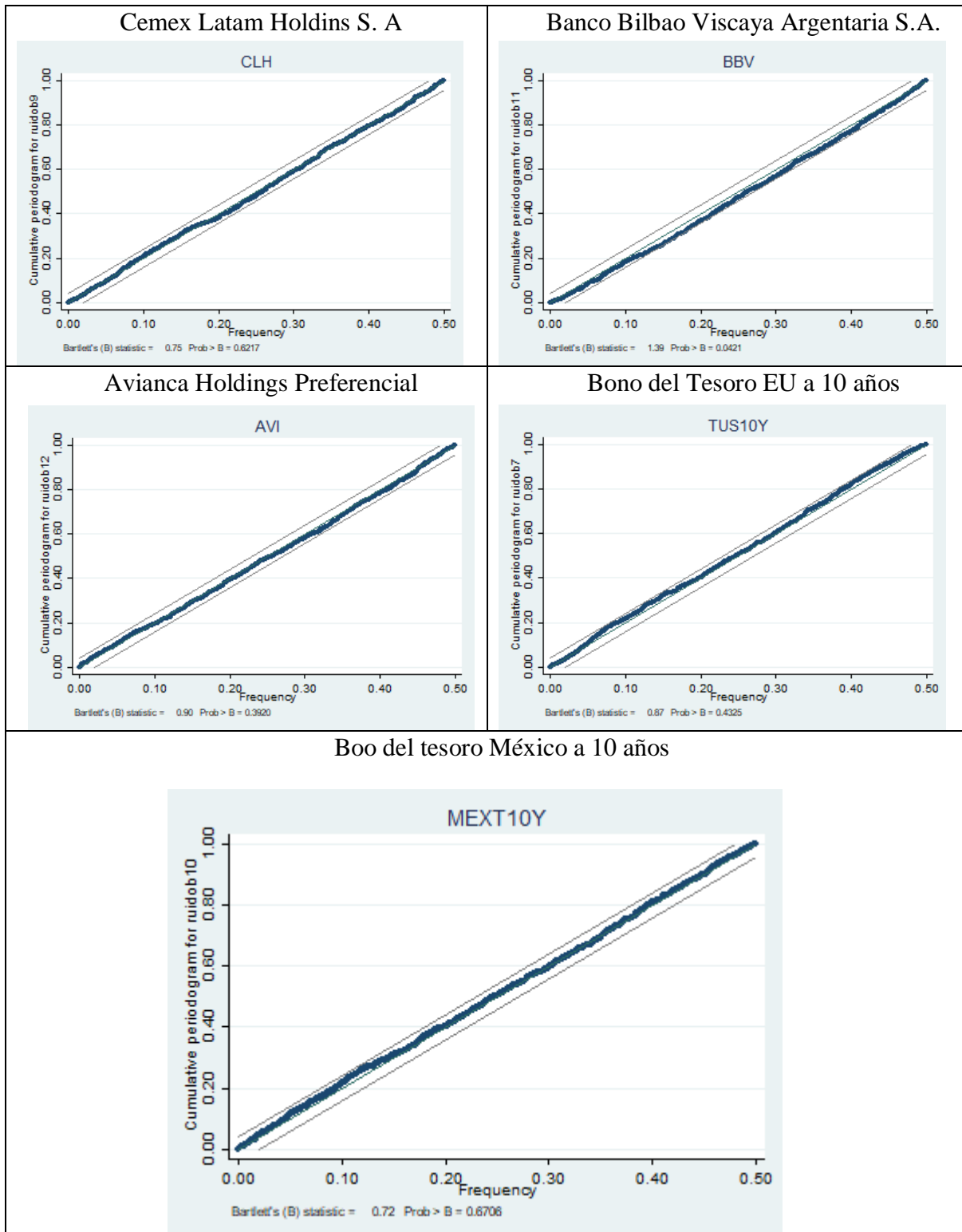
Anexo 2. Graficas de ruido blanco



OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES



OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES



Anexo 3. Rentabilidad del portafolio para el fondo conservador

Rentabilidad
del fondo
conservador

Oscar Daniel Betancurt
Steven Niño Rodríguez
Dirección
Ciudad y código postal

Oscar Daniel Betancurt
Steven Niño Rodríguez
Andrés Felipe Bonilla

Rentabilidad
Del Fondo
Conservador

Comparación de los rendimientos
del portafolio correspondiente al
fondo conservador



r

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES



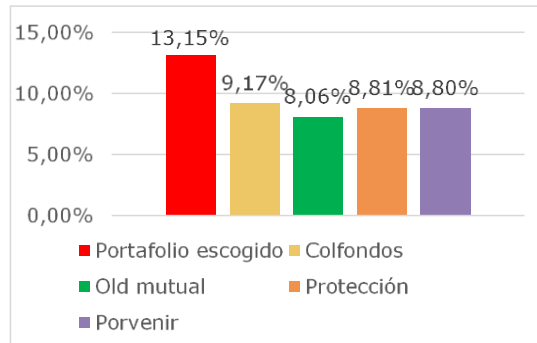
¿A Quién Va Dirigido?

Dirigido a personas que están más cerca de la edad para pensionarse, donde su principal objetivo, más que la búsqueda de rentabilidad es proteger su capital de las fluctuaciones de los mercados.

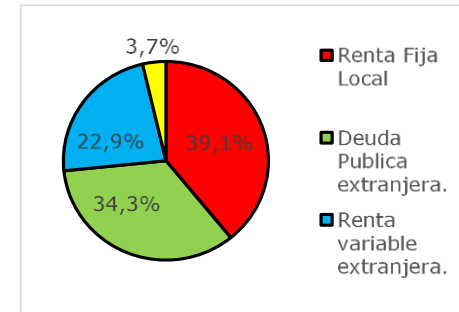
Principales Inversiones

- Global X MSCI Colombia ETF - 35,58%
- Bono del Tesoro México a 10 años - 27,22%
- Cemex Latam Holdins S. A. - 16,57%
- Bono del Tesoro Estados Unidos a 10 años - 7,06%
- Avianca Holdings Preferencial - 6,37%
- Interconnection Electric S. A. ESP - 3,66%
- CDT Bancolombia a 1 año - 3,52%

Comparación Fondos Actuales



Composición De Portafolios



Un portafolio construido principalmente con activos de riesgo cero como la renta fija y la deuda pública, los cuales representan el 70% del portafolio, perfecto para quien desea cuidar sus fondos en inversiones seguras.

Anexo 4. Rentabilidad del portafolio para el fondo moderado

Rentabilidad
del fondo
moderado

Oscar Daniel Betancurt
Steven Niño Rodríguez
Andrés Felipe Bonilla

Oscar Daniel Betancurt
Steven Niño Rodríguez
Andrés Felipe Bonilla

Rentabilidad del fondo moderado

Comparación de los rendimientos
del portafolio correspondiente al
fondo moderado



OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES



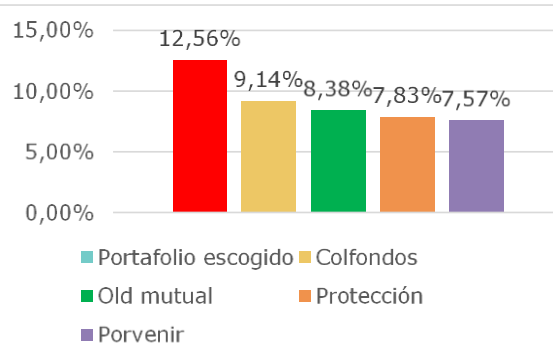
¿A Quién Va Dirigido?

Dirigido a personas que se encuentran lejos de la edad proyectada para pensionarse y aceptan mayores caídas en el capital acumulado como consecuencia del riesgo asumido, con el fin de buscar en el largo plazo una mayor rentabilidad que la que se obtendría en un Fondo de Pensiones Moderado.

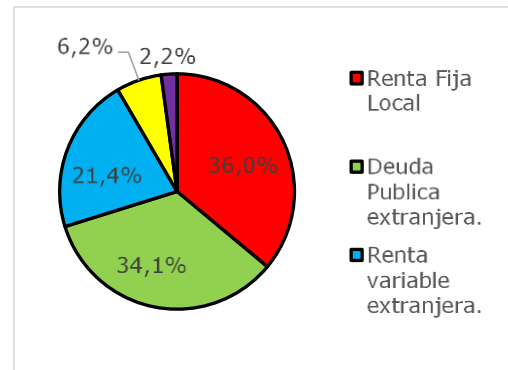
Principales Inversiones

- Global X MSCI Colombia ETF - 30,46%
- Bono del Tesoro México a 10 años - 27,30%
- Cemex Latam Holdins S. A. 14,94%
- Bono del Tesoro Estados Unidos a 10 años - 6,84%
- Avianca Holdings Preferencial - 6,46%
- Interconnection Electric S. A. ESP - 6,25%
- CDT Bancolombia a 1 año - 5,58%

Comparación Fondos Actuales



Composición De Portafolios



Un fondo balanceado entre la seguridad de los activos nacionales y la rentabilidad de los extranjeros, adecuado para quien desee correr algunos riesgos con tal de obtener un retorno estable en el mediano plazo, una composición adecuada de renta fija y renta variable.

Anexo 5. Rentabilidad del portafolio para el fondo riesgoso

Rentabilidad
del fondo
agresivo

Oscar Daniel Betancurt
Steven Niño Rodríguez
Andrés Felipe Bonilla

Oscar Daniel Betancurt
Steven Niño Rodríguez
Andrés Felipe Bonilla

Rentabilidad del fondo agresivo

Comparación de los rendimientos
del portafolio correspondiente al
fondo agresivo



OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS PARA FONDOS PENSIONALES



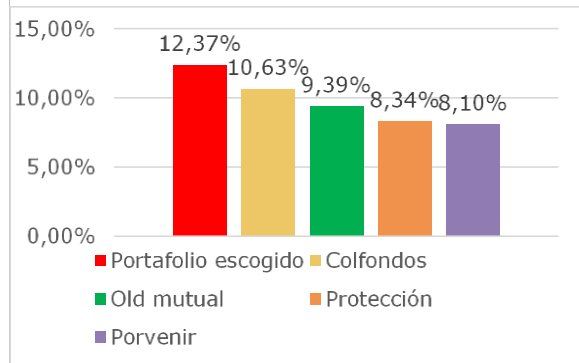
¿A quién va dirigido?

Dirigido a personas que se encuentran en la primera fase de su tiempo de cotización y por tanto no están cerca a la edad proyectada para pensionarse y que toleran eventuales caídas en el capital acumulado, para buscar en el mediano plazo una mayor rentabilidad que la que se obtendría en el Fondo de Pensiones Conservador acosta de aceptar mayores volatilidades y riesgo de inversión en el mercado.

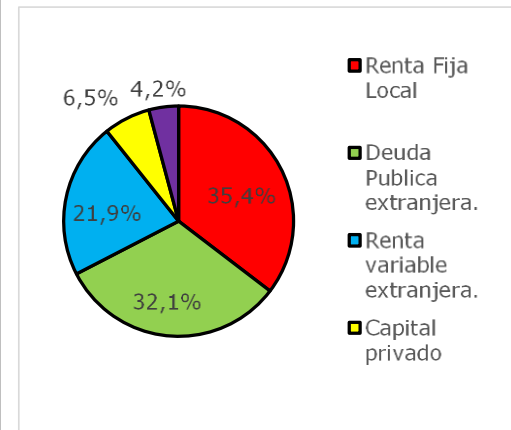
Principales inversiones

- Global X MSCI Colombia ETF - 29,72%
- Bono del Tesoro México a 10 años - 24,36%
- Cemex Latam Holdins S. A. 14,96%
- Interconnection Electric S. A. ESP - 7,70%
- Avianca Holdings Preferencial - 6,89%
- CDT Bancolombia a 1 año - 6,55%
- Bono del Tesoro Estados Unidos a 10 años - 64%

Comparación fondos actuales



Composición de portafolios



Un fondo diseñado para quienes desean obtener altas rentabilidades en el mediano plazo a costa de perder alguna pequeña parte a costa de la inversión riesgosa invierte casi un 50% en activos extranjeros y al menos un 40% en renta variables, bastante cercano a los toques que exige la ley.